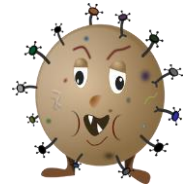


Mathematik * Jahrgangsstufe 10 * Die Exponentialfunktion als Wachstumsfunktion

1. In einer Zellkultur beobachtet man pro 12 Minuten eine Zunahme der Zellenanzahl um 4,5%.
 - a) Beschreiben Sie die Anzahl $A(t)$ der Zellen durch eine passende Exponentialfunktion.
 - b) In welcher Zeitspanne verdoppelt sich die Anzahl der Zellen.

2. Die Bevölkerung eines Landes wächst pro Jahr um 1,3%.
 - a) Beschreiben Sie die Bevölkerungszahl mit Hilfe einer geeigneten Funktion.
 - b) In welcher Zeit nimmt die Population um 25% zu?

3. Eine Bakterienkultur wächst pro Stunde um 14%.
 - a) Geben Sie die Anzahl $N(t)$ der Bakterien als Exponentialfunktion an.
 - b) Nach welcher Zeit hat sich die Bakterienzahl verzehnfacht?



4. Die Bevölkerung eines Landes ist in 10 Jahren von 8,75 Millionen auf gegenwärtig 9,35 Millionen gewachsen.
 - a) Beschreiben Sie die Bevölkerungszahl mit Hilfe einer geeigneten Funktion.
 - b) Wie viel Prozent beträgt die jährliche Zuwachsrate?
 - c) In wie vielen Jahren kann man mit einer Bevölkerung von 10,0 Millionen rechnen?

5. Die Halbwertszeit von Jod 131 beträgt 8,02 Tage.
 - a) Geben Sie die Anzahl $N(t)$ der noch nicht zerfallenen Jodatome an.
 - b) Welcher Prozentsatz an Jod zerfällt täglich?
 - c) Nach welcher Zeit sind 99% des radioaktiven Jods zerfallen?



6. Die Intensität von Licht wird beim Durchgang durch eine Glasplatte der Dicke 5,0mm durch Absorptionsprozesse um 1,2% abgeschwächt.
 - a) Geben Sie die Intensität $I(x)$ von Licht nach dem Durchgang durch Glas der Dicke x an.
 - b) Welcher Anteil des Lichts wird durch 10 Glasplatten der Dicke 5,0mm absorbiert?
 - c) Wie viele Glasplatten benötigt man, um die Intensität von Licht auf die Hälfte zu reduzieren?

7. Die Speicherkapazität (Speicherdichte) moderner Computer (Zahl der Transistoren pro Flächeneinheit eines Silizium-Mikroprozessors) wird in Bit pro cm^2 (heutzutage eher in Gigabit pro cm^2) gemessen.

Das berühmte Mooresche Gesetz besagt, dass sich diese Speicherdichte seit 1970 alle 18 Monate verdoppelt. 1970 betrug die Speicherdichte 10^3 Bit pro cm^2 .

Welcher Wert ergibt sich nach dem Mooreschen Gesetz für 1990, 2000, 2100 bzw. 2014?

(Vergleichen Sie: 2010 lag die maximale Speicherdichte bei etwa 115 Gigabit pro cm^2)



Mathematik * Jahrgangsstufe 10 * Die Exponentialfunktion als Wachstumsfunktion

1. a) $A(t) = A_0 \cdot (1 + 4,5\%)^{\frac{t}{12\text{min}}} = A_0 \cdot (1,045)^{\frac{t}{12\text{min}}}$

b) $A(t_1) = 2 \cdot A_0 \Leftrightarrow A_0 \cdot (1,045)^{\frac{t_1}{12\text{min}}} = 2 \cdot A_0 \Leftrightarrow (1,045)^{\frac{t_1}{12\text{min}}} = 2 \Leftrightarrow \frac{t_1}{12\text{min}} = \log_{1,045} 2 \Leftrightarrow$

$$\frac{t_1}{12\text{min}} = \log_{1,045} 2 \Leftrightarrow t_1 = 12\text{min} \cdot \log_{1,045} 2 = 193,16\dots \text{min} \approx 3\text{h}13\text{min}$$

2. a) $N(t) = N_0 \cdot (1 + 1,3\%)^{\frac{t}{1\text{a}}} = N_0 \cdot (1,013)^{\frac{t}{1\text{a}}}$

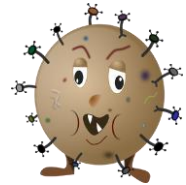
b) $1,25 \cdot N_0 = N(t_1) = N_0 \cdot (1,013)^{\frac{t_1}{1\text{a}}} \Leftrightarrow 1,25 = (1,013)^{\frac{t_1}{1\text{a}}} \Leftrightarrow \frac{t_1}{1\text{a}} = \log_{1,013} 1,25 \Leftrightarrow$

$$t_1 = 1\text{a} \cdot \log_{1,013} 1,25 = 17,27\dots \text{a} \approx 17\text{a}$$

3. a) $N(t) = N_0 \cdot (1 + 14\%)^{\frac{t}{1\text{h}}} = N_0 \cdot (1,14)^{\frac{t}{1\text{h}}}$

b) $10 \cdot N_0 = N(t_1) = N_0 \cdot (1,14)^{\frac{t_1}{1\text{h}}} \Leftrightarrow 10 = (1,14)^{\frac{t_1}{1\text{h}}} \Leftrightarrow \frac{t_1}{1\text{h}} = \log_{1,14} 10 \Leftrightarrow$

$$t_1 = 1\text{h} \cdot \log_{1,14} 10 = 17,57\dots \text{h} \approx 18\text{h}$$



4. a) $N(t) = N_0 \cdot 2^{\frac{t}{T}}$ und $N_0 = 8,75 \cdot 10^6$ mit $t=0 \hat{=}$ Zeit vor 10 Jahren

$$9,35 \cdot 10^6 = N(10\text{a}) \Leftrightarrow 9,35 \cdot 10^6 = 8,75 \cdot 10^6 \cdot 2^{\frac{10\text{a}}{T}} \Leftrightarrow \frac{9,35}{8,75} = 2^{\frac{10\text{a}}{T}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{10\text{a}}{T} = \log_2 \frac{9,35}{8,75} \Leftrightarrow T = \frac{10\text{a}}{\log_2 \frac{9,35}{8,75}} \approx 104,5\text{a} \text{ also } N(t) = 8,75 \cdot 10^6 \cdot 2^{\frac{t}{104,5\text{a}}}$$

b) $N(t) = N_0 \cdot 2^{\frac{t}{104,5\text{a}}} \Rightarrow N(1\text{a}) = N_0 \cdot 2^{\frac{1\text{a}}{104,5\text{a}}} = 1,006655 \cdot N_0 = (1 + 0,67\%) \cdot N_0$

Die jährliche Zuwachsrate pro Jahr beträgt etwa 0,67 %.

c) $10 \cdot 10^6 = N(t_1) \Rightarrow 10 \cdot 10^6 = 8,75 \cdot 10^6 \cdot 2^{\frac{t_1}{104,5\text{a}}} \Leftrightarrow \frac{10}{8,75} = 2^{\frac{t_1}{104,5\text{a}}} \Leftrightarrow$

$$\frac{t_1}{104,5\text{a}} = \log_2 \frac{10}{8,75} \Leftrightarrow t_1 = 104,5\text{a} \cdot \log_2 \frac{10}{8,75} = 20,1\dots \text{a} \approx 20\text{a}$$

In etwa 20 Jahren kann man mit einer Bevölkerungszahl von 10 Millionen rechnen.

5. a) $N(t) = N_0 \cdot 0,5^{\frac{t}{8,02\text{d}}} = N_0 \cdot 2^{\frac{-t}{8,02\text{d}}}$

b) $N(1\text{d}) = N_0 \cdot 2^{\frac{-1\text{d}}{8,02\text{d}}} = 0,9172\dots \cdot N_0 \approx 91,7\% \cdot N_0$

Täglich zerfallen also etwa 8,3% des radioaktiven Iods 131.

c) $0,01 \cdot N_0 = N(t_1) = N_0 \cdot 2^{\frac{-t_1}{8,02\text{d}}} \Leftrightarrow 0,01 = 2^{\frac{-t_1}{8,02\text{d}}} \Leftrightarrow -\frac{t_1}{8,02\text{d}} = \log_2 0,01 \Leftrightarrow$

$$t_1 = -8,02\text{d} \cdot \log_2 0,01 \approx 53\text{d}$$

Nach etwa 53 Tagen sind also 99% des radioaktiven Jods 131 zerfallen.



6. a) $I(x) = I_0 \cdot (1 - 1,2\%)^{\frac{x}{5,0\text{mm}}} = I_0 \cdot 0,988^{\frac{x}{5,0\text{mm}}}$

b) $I(10 \cdot 5,0\text{mm}) = I(50\text{mm}) = I_0 \cdot 0,988^{\frac{50\text{mm}}{5,0\text{mm}}} = I_0 \cdot 0,988^{10} = 88,6 \cdot I_0$

Es werden also $100\% - 88,6\% = 11,4\%$ der Strahlung absorbiert.

c) $I(x_1) = 0,50 \cdot I_0 \Leftrightarrow I_0 \cdot 0,988^{\frac{x_1}{5,0\text{mm}}} = 0,50 \cdot I_0 \Leftrightarrow 0,988^{\frac{x_1}{5,0\text{mm}}} = 0,50 \Leftrightarrow$

$$\frac{x_1}{5,0\text{mm}} = \log_{0,988} 0,50 \Leftrightarrow x = 5,0\text{mm} \cdot 57,4\dots = 287,\dots\text{mm}$$

Man benötigt also mindestens 58 Glasplatten der Dicke 5,0mm.

7. Speicherdichte $D(t) = D_0 \cdot 2^{\frac{t}{1,5\text{a}}}$ mit $D_0 = 10^3 \frac{\text{Bit}}{\text{cm}^2}$ und $t \hat{=} \text{Anzahl der Jahre nach 1970}$.

1990 $\hat{=} t_1 = 20\text{a}$ also $D(20\text{a}) = D_0 \cdot 2^{\frac{20\text{a}}{1,5\text{a}}} = 10^3 \frac{\text{Bit}}{\text{cm}^2} \cdot 2^{\frac{20}{1,5}} = 1,0 \cdot 10^7 \frac{\text{Bit}}{\text{cm}^2} = 10 \frac{\text{Megabit}}{\text{cm}^2}$

2000 $\hat{=} t_1 = 30\text{a}$ also $D(30\text{a}) = D_0 \cdot 2^{\frac{30\text{a}}{1,5\text{a}}} = 10^3 \frac{\text{Bit}}{\text{cm}^2} \cdot 2^{20} = 1,0 \cdot 10^9 \frac{\text{Bit}}{\text{cm}^2} = 1,0 \frac{\text{Gigabit}}{\text{cm}^2}$

2010 $\hat{=} t_1 = 40\text{a}$ also $D(40\text{a}) = D_0 \cdot 2^{\frac{40\text{a}}{1,5\text{a}}} = 10^3 \frac{\text{Bit}}{\text{cm}^2} \cdot 2^{\frac{40}{1,5}} = 1,1 \cdot 10^{11} \frac{\text{Bit}}{\text{cm}^2} = 110 \frac{\text{Gigabit}}{\text{cm}^2}$

2014 $\hat{=} t_1 = 44\text{a}$ also $D(44\text{a}) = D_0 \cdot 2^{\frac{44\text{a}}{1,5\text{a}}} = 10^3 \frac{\text{Bit}}{\text{cm}^2} \cdot 2^{\frac{44}{1,5}} = 6,8 \cdot 10^{11} \frac{\text{Bit}}{\text{cm}^2} = 680 \frac{\text{Gigabit}}{\text{cm}^2}$

Hinweis:

Gibt j die Jahreszahl an, so kann man auch schreiben

$$D(j) = D_0 \cdot 2^{\frac{j-1970}{1,5}} \quad \text{mit} \quad D_0 = 10^3 \frac{\text{Bit}}{\text{cm}^2}$$

