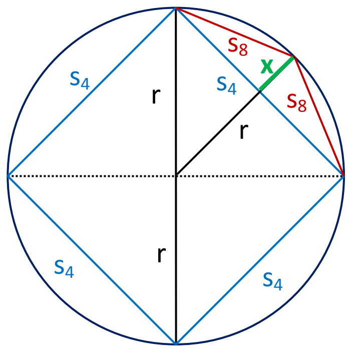
Mathematik * Jahrgangsstufe 10 * Näherungsweise Berechnung der Kreiszahl π

Einem Kreis mit Radius r wird ein regelmäßiges n-Ecke (Kantenlänge s_n und Umfang $u_n = n \cdot s_n$) einbeschrieben. Im Bild beginnt man z.B. mit $n = 4$.
Anschließend wird die Eckenzahl verdoppelt. Das neue 2n-Eck hat nun die Kantenlänge s_{2n} und den Umfang $u_{2n} = 2n \cdot s_{2n}$. Offensichtlich gilt: $u_n < u_{2n} <$ Kreisumfang $= 2\, r\, \pi$.
Je öfter man die Seitenzahl verdoppelt, um so besser wird sich der Umfang des Vielecks dem Kreisumfang annähern. Damit erhält man eine Möglichkeit die Zahl π näherungsweise zu ermitteln.



Zwischen s_n, s_{2n} und r besteht der folgende Zusammenhang:

$$s_{2n} = \sqrt{2r^2 - r \cdot \sqrt{4r^2 - s_n^{\,2}}}$$

Bestätigen Sie die folgende Begründung:

(1) $s_{2n}^{\,2} = x^2 + (0{,}5 \cdot s_n)^2$

(2) $r^2 = (r - x)^2 + (0{,}5 \cdot s_n)^2 \quad \Rightarrow \quad r - x = \sqrt{r^2 - (0{,}5 s_n)^2} \quad \Rightarrow$

$$x^2 = \left(r - \sqrt{r^2 - (0{,}5 s_n)^2}\,\right)^2 = r^2 - 2r \cdot \sqrt{r^2 - (0{,}5 s_n)^2} + (r^2 - (0{,}5 s_n)^2) \Rightarrow$$

$$x^2 = 2r^2 - 2r \cdot \sqrt{r^2 - (0{,}5 s_n)^2} - (0{,}5 s_n)^2 \quad \text{liefert in (1) eingesetzt}$$

$$s_{2n}^{\,2} = 2r^2 - 2r \cdot \sqrt{r^2 - (0{,}5 s_n)^2} = 2r^2 - r \cdot \sqrt{4r^2 - s_n^{\,2}} \;.$$

Wählt man nun den Radius $r = 1$, so folgt $s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^{\,2}}}$ und für den Umfang gilt:

$n \cdot s_n < 2n \cdot s_{2n} < 2 \cdot \pi \cdot r$ und mit $r = 1$ damit $n \cdot s_{2n} < \pi$ d.h. $\pi > n \cdot s_{2n} = n \cdot \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^{\,2}}}$,

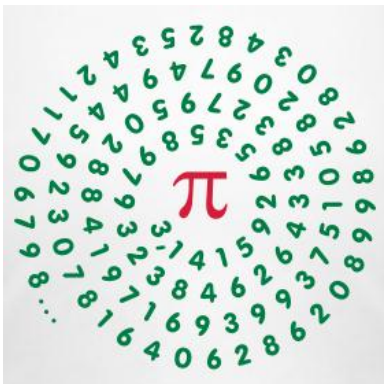
wobei für sehr großes n immer besser die Näherung $\pi \approx n \cdot s_{2n} = n \cdot \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^{\,2}}}$ gilt.

Aufgabe:

Berechnen Sie nun die Werte für $s_4, s_8, s_{16}, \ldots, s_{1024}$ und auch die Werte $2 \cdot s_4,\ 4 \cdot s_8, \ldots, 512 \cdot s_{1024}$.

Vergleichen Sie den Näherungswert $1024 \cdot s_{2048} = 1024 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_{1024}^{\,2}}}$ für Pi
mit dem Taschenrechnerwert von $\pi = 3{,}1415926535\ldots$.

Welcher Näherungswert ergibt sich für die Kreiszahl Pi,
wenn man mit einem einbeschriebenen 6-Eck beginnt
und bis zum 192-Eck weiterrechnet?



Mathematik * Jahrgangsstufe 10 * Näherungsweise Berechnung der Kreiszahl π

Lösung der Aufgabe:

$$s_4 = \sqrt{2} \qquad \pi \approx 2 \cdot s_4 = 2 \cdot \sqrt{2} = 2{,}8...$$

$$s_8 = \sqrt{2-\sqrt{2}} \qquad \pi \approx 4 \cdot s_8 = 4 \cdot \sqrt{2-\sqrt{2}} = 3{,}06...$$

$$s_{16} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} \qquad \pi \approx 8 \cdot s_{16} = 8 \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} = 3{,}121...$$

$$s_{32} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \qquad \pi \approx 16 \cdot s_{32} = 16 \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} = 3{,}136...$$

$$s_{64} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}} \qquad \pi \approx 32 \cdot s_{64} = 3{,}1403...$$

$$s_{128} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}} \qquad \pi \approx 64 \cdot s_{128} = 3{,}1412...$$

$$s_{256} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}} \qquad \pi \approx 128 \cdot s_{256} = 3{,}14151...$$

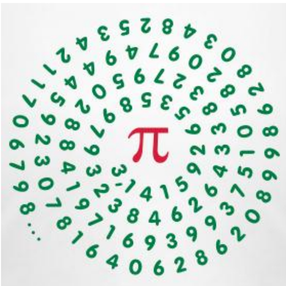
$$s_{512} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}}} \qquad \pi \approx 256 \cdot s_{512} = 3{,}14157...$$

$$s_{1024} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}}}} \qquad \pi \approx 512 \cdot s_{1024} = 3{,}1415877...$$

$$s_{2048} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}}}}} \qquad \pi \approx 1024 \cdot s_{2048} = 3{,}14159142...$$

Vergleiche: π = 3,141592653589…

Beginnt man mit dem einbeschriebenen Sechseck, so folgt



$$s_6 = 1$$

$$s_{12} = \sqrt{2-\sqrt{3}}$$

$$s_{24} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

$$s_{48} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$$

$$s_{96} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}$$

$$s_{192} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}} \quad \text{und damit} \quad \pi \approx 96 \cdot s_{192} = 3{,}14145...$$