

## Mathematik \* Jahrgangsstufe 10 \* Näherungsweise Berechnung der Kreiszahl $\pi$

Einem Kreis mit Radius  $r$  wird ein regelmäßiges  $n$ -Ecke (Kantenlänge  $s_n$  und Umfang  $u_n = n \cdot s_n$ ) einbeschrieben. Im Bild beginnt man z.B. mit  $n = 4$ .

Anschließend wird die Eckenzahl verdoppelt. Das neue  $2n$ -Eck hat nun die Kantenlänge  $s_{2n}$  und den Umfang  $u_{2n} = 2n \cdot s_{2n}$ . Offensichtlich gilt:  $u_n < u_{2n} < \text{Kreisumfang} = 2r\pi$ .

Je öfter man die Seitenzahl verdoppelt, um so besser wird sich der Umfang des Vielecks dem Kreisumfang annähern. Damit erhält man eine Möglichkeit die Zahl  $\pi$  näherungsweise zu ermitteln.

Zwischen  $s_n$ ,  $s_{2n}$  und  $r$  besteht der folgende Zusammenhang:

$$s_{2n} = \sqrt{2r^2 - r \cdot \sqrt{4r^2 - s_n^2}}$$

Bestätigen Sie die folgende Begründung:

$$(1) \quad s_{2n}^2 = x^2 + (0,5 \cdot s_n)^2$$

$$(2) \quad r^2 = (r-x)^2 + (0,5 \cdot s_n)^2 \Rightarrow r-x = \sqrt{r^2 - (0,5s_n)^2} \Rightarrow$$

$$x^2 = (r - \sqrt{r^2 - (0,5s_n)^2})^2 = r^2 - 2r \cdot \sqrt{r^2 - (0,5s_n)^2} + (r^2 - (0,5s_n)^2) \Rightarrow$$

$$x^2 = 2r^2 - 2r \cdot \sqrt{r^2 - (0,5s_n)^2} - (0,5s_n)^2 \quad \text{liefert in (1) eingesetzt}$$

$$s_{2n}^2 = 2r^2 - 2r \cdot \sqrt{r^2 - (0,5s_n)^2} = 2r^2 - r \cdot \sqrt{4r^2 - s_n^2}.$$

Wählt man nun den Radius  $r = 1$ , so folgt  $s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}}$  und für den Umfang gilt:

$$n \cdot s_n < 2n \cdot s_{2n} < 2 \cdot \pi \cdot r \quad \text{und mit } r = 1 \text{ damit } n \cdot s_{2n} < \pi \text{ d.h. } \pi > n \cdot s_{2n} = n \cdot \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}},$$

wobei für sehr großes  $n$  immer besser die Näherung  $\pi \approx n \cdot s_{2n} = n \cdot \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}}$  gilt.

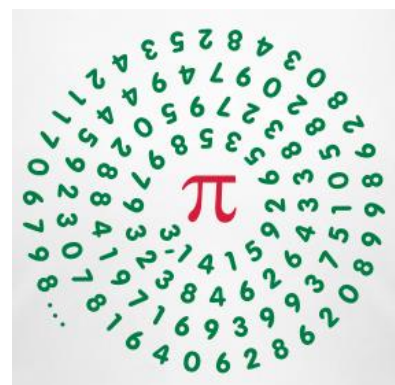
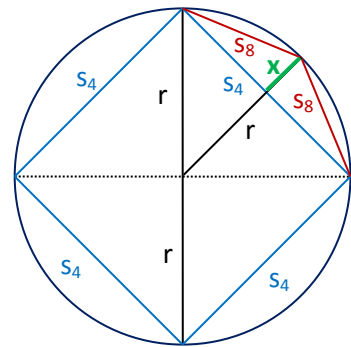
### Aufgabe:

Berechnen Sie nun die Werte für  $s_4, s_8, s_{16}, \dots, s_{1024}$  und auch die Werte  $2 \cdot s_4, 4 \cdot s_8, \dots, 512 \cdot s_{1024}$ .

Vergleichen Sie den Näherungswert  $1024 \cdot s_{2048} = 1024 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_{1024}^2}}$  für  $\pi$

mit dem Taschenrechnerwert von  $\pi = 3,1415926535 \dots$

Welcher Näherungswert ergibt sich für die Kreiszahl  $\pi$ , wenn man mit einem einbeschriebenen 6-Eck beginnt und bis zum 192-Eck weiterrechnet?



# Mathematik \* Jahrgangsstufe 10 \* Näherungsweise Berechnung der Kreiszahl $\pi$

Lösung der Aufgabe:

$s_4 = \sqrt{2}$	$\pi \approx 2 \cdot s_4 = 2 \cdot \sqrt{2} = 2,8\dots$
$s_8 = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$	$\pi \approx 4 \cdot s_8 = 4 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}} = 3,06\dots$
$s_{16} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$	$\pi \approx 8 \cdot s_{16} = 8 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} = 3,121\dots$
$s_{32} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}$	$\pi \approx 16 \cdot s_{32} = 16 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} = 3,136\dots$

$s_{64} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}$	$\pi \approx 32 \cdot s_{64} = 3,1403\dots$
---	---

$s_{128} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}}$	$\pi \approx 64 \cdot s_{128} = 3,1412\dots$
---	--

$s_{256} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}}}$	$\pi \approx 128 \cdot s_{256} = 3,14151\dots$
--	--

$s_{512} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}}}}$	$\pi \approx 256 \cdot s_{512} = 3,14157\dots$
---	--

$s_{1024} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}}}}}$	$\pi \approx 512 \cdot s_{1024} = 3,1415877\dots$
---	---

$s_{2048} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}}}}}}}$	$\pi \approx 1024 \cdot s_{2048} = 3,14159142\dots$
---	---

**Vergleiche:  $\pi = 3,141592653589\dots$**

Beginnt man mit dem einbeschriebenen Sechseck, so folgt

$s_6 = 1$	
$s_{12} = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$	
$s_{24} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$	
$s_{48} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}$	
$s_{96} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}$	
$s_{192} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}}}$	und damit $\pi \approx 96 \cdot s_{192} = 3,14145\dots$

