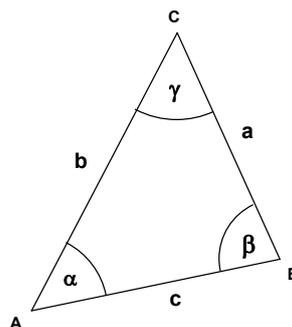


Mathematik * Jahrgangsstufe 10 * Aufgaben zum Sinussatz

In einem beliebigen Dreieck ABC gilt der so genannte

Sinussatz:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} \quad \text{und} \quad \frac{a}{c} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \quad \text{und} \quad \frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$$



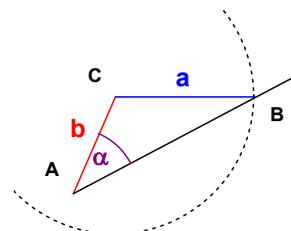
Aufgaben zum Sinussatz

1. In einem Dreieck ABC sind zwei Seiten und ein Winkel bekannt.

Es gilt: $a = 6,0$, $b = 4,5$ und $\alpha = 75^\circ$

Berechnen Sie die Länge c und die Größe der Winkel β und γ .

(Hinweis: Die Aufgabe ist wegen des SsW-Kongruenzsatzes eindeutig lösbar.)



2. In einem Dreieck ABC soll gelten $a = 4,0$ und $b = 5,0$.

Zusätzlich soll für den Winkel α gelten:

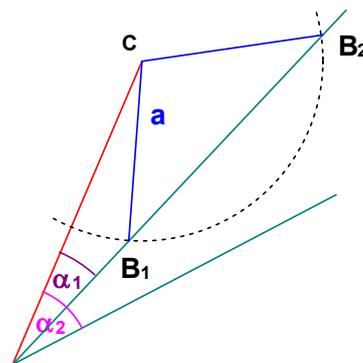
a) $\alpha = 35^\circ$

b) $\alpha = 65^\circ$

Prüfen Sie, ob es Dreiecke mit diesen Bestimmungsstücken gibt!

Berechnen Sie gegebenenfalls die restlichen Winkel und c .

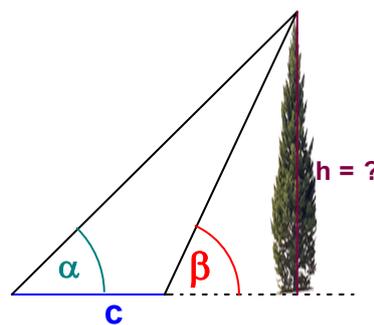
(Hinweis: Für sSW-Vorgaben kann es zwei, eine oder keine Lösung der Aufgabe geben.)



3. Die Höhe eines Baumes lässt sich durch das Messen von zwei Winkeln und einer horizontalen Strecke ermitteln (siehe Bild).

Es gilt: $c = 20\text{m}$, $\alpha = 45^\circ$ und $\beta = 65^\circ$

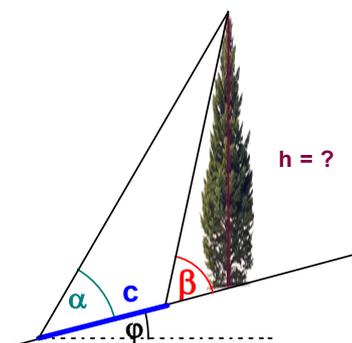
Bestimmen Sie die Höhe h des Baumes.



4. Ein Baum steht auf einem Hang mit dem Neigungswinkel $\varphi = 15^\circ$.

Es gilt: $c = 15\text{m}$, $\alpha = 45^\circ$ und $\beta = 63^\circ$

Bestimmen Sie aus diesen Messwerten die Höhe des Baums.



Mathematik * Jahrgangsstufe 10 * Aufgaben zum Sinussatz * Lösungen

$$1. \quad \frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \Rightarrow \sin \beta = \frac{b \cdot \sin \alpha}{a} = \frac{4,5 \cdot \sin 75^\circ}{6,0} = 0,7244... \Rightarrow$$

$$\beta = \sin^{-1}(0,7244...) = 46,42...^\circ \approx 46,4^\circ \quad \text{und} \quad \gamma = 180^\circ - \alpha - \beta \approx 58,6^\circ$$

$$\frac{c}{a} = \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} \Rightarrow c = \frac{a \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha} \approx \frac{6,0 \cdot \sin 58,6^\circ}{\sin 75^\circ} = 5,301... \approx 5,3$$

$$2. \quad a) \quad \frac{b}{a} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \Rightarrow \sin \beta = \frac{b \cdot \sin \alpha}{a} = \frac{5,0 \cdot \sin 35^\circ}{4,0} = 0,7169... \Rightarrow \beta_1 = 45,80...^\circ \approx 45,8^\circ$$

Es gibt eine zweite Lösung (siehe Bild): $\beta_2 = 180^\circ - \beta_1 \approx 134,2^\circ$

$$\gamma_1 = 180^\circ - \alpha - \beta_1 = 180^\circ - 35^\circ - 45,80...^\circ \approx 99,2^\circ \quad \text{und} \quad \gamma_2 = 180^\circ - \alpha - \beta_2 \approx 10,8^\circ$$

$$\frac{c}{a} = \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} \Rightarrow c_1 = \frac{4,0 \cdot \sin \gamma_1}{\sin \alpha} \approx \frac{4,0 \cdot \sin 99,2^\circ}{\sin 35^\circ} = 6,884... \approx 6,9 \quad \text{und}$$

$$c_2 = \frac{4,0 \cdot \sin \gamma_2}{\sin \alpha} \approx \frac{4,0 \cdot \sin 10,8^\circ}{\sin 35^\circ} = 1,306... \approx 1,3$$

$$b) \quad \frac{b}{a} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \Rightarrow \sin \beta = \frac{b \cdot \sin \alpha}{a} = \frac{5,0 \cdot \sin 65^\circ}{4,0} = 1,132... \text{ geht nicht, denn } \sin \beta \leq 1 \Rightarrow$$

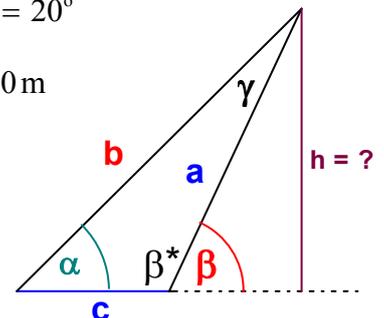
Es gibt keine Lösung zu dieser Aufgabenstellung.

$$3. \quad \beta^* = 180^\circ - \beta = 115^\circ \quad \text{und} \quad \gamma = 180^\circ - \alpha - \beta^* = 180^\circ - 45^\circ - 115^\circ = 20^\circ$$

$$\frac{b}{c} = \frac{\sin \beta^*}{\sin \gamma} \Rightarrow b = \frac{c \cdot \sin \beta^*}{\sin \gamma} = \frac{20\text{m} \cdot \sin 115^\circ}{\sin 20^\circ} = 52,997... \text{m} \approx 53,0 \text{m}$$

$$\frac{h}{b} = \sin \alpha \Rightarrow$$

$$h = b \cdot \sin \alpha \approx 53,0 \text{m} \cdot \sin 45^\circ = 37,47... \text{m} \approx 37,5 \text{m}$$



$$4. \quad \beta^* = 180^\circ - \beta = 180^\circ - 63^\circ = 117^\circ \quad \text{und}$$

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta^* = 180^\circ - 45^\circ - 117^\circ = 18^\circ$$

$$\frac{b}{c} = \frac{\sin \beta^*}{\sin \gamma} \Rightarrow b = \frac{c \cdot \sin \beta^*}{\sin \gamma} = \frac{15\text{m} \cdot \sin 117^\circ}{\sin 18^\circ} = 43,250... \text{m} \approx 43,25 \text{m}$$

$$\frac{h+x}{b} = \sin(\alpha + \varphi) \Rightarrow h+x = b \cdot \sin(\alpha + \varphi) \Rightarrow$$

$$h+x = b \cdot \sin(\alpha + \varphi) = 43,25 \text{m} \cdot \sin(45^\circ + 15^\circ) = 37,455... \text{m} \approx 37,5 \text{m}$$

$$\frac{y}{b} = \cos(\alpha + \varphi) \Rightarrow y \approx 43,25 \text{m} \cdot \cos(45^\circ + 15^\circ) \approx 21,63 \text{m}$$

$$\frac{x}{y} = \tan \varphi \Rightarrow x \approx 21,63 \text{m} \cdot \tan 15^\circ \approx 5,80 \text{m}$$

$$\text{also } h = h+x - x \approx 37,5 \text{m} - 5,8 \text{m} = 31,7 \text{m}$$

