

Q11 * Mathematik * Anwendungsaufgaben zur Ableitung einer Funktion

Physik

Für die Geschwindigkeit v eines Körpers gilt: $v(t_o) \approx \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_1 - x_o}{t_1 - t_o}$

Mit mathematischer Grenzwertbildung folgt: $v(t_o) = \lim_{t_1 \rightarrow t_o} \frac{x_1 - x_o}{t_1 - t_o} = \frac{dx}{dt}(t_o) = \dot{x}(t_o)$

$\dot{x}(t_o)$ gibt dabei die Ableitung der Orts-Funktion $x = x(t)$ nach der Zeit t an.

Entsprechend gilt für die Beschleunigung a dieses Körpers:

$a(t_o) \approx \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_1 - v_o}{t_1 - t_o}$ und damit $a(t_o) = \lim_{t_1 \rightarrow t_o} \frac{v_1 - v_o}{t_1 - t_o} = \frac{dv}{dt}(t_o) = \dot{v}(t_o) = \ddot{x}(t_o)$

$\ddot{x}(t_o)$ gibt dabei die zweite Ableitung der Orts-Funktion $x = x(t)$ an.

Mit dem zweiten newtonschen Gesetz gilt also: $F(t) = m \cdot a(t) = m \cdot \dot{v}(t) = m \cdot \ddot{x}(t)$



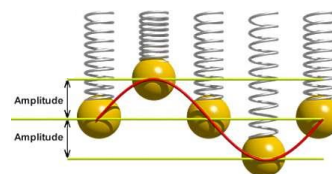
1. a) Begründen Sie, dass für eine Bewegung (in x -Richtung) mit der konstanten Beschleunigung a (in x -Richtung) die Ortsfunktion $x = x(t)$ folgendermaßen lautet:

$$x = x(t) = x_o + v_o \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2. \quad \text{Welche Bedeutung haben dabei } x_o \text{ und } v_o \text{ ?}$$

- b) Ein Ball der Masse 500g wird mit der Anfangsgeschwindigkeit 15 ms^{-1} nach oben geworfen. Welche Höhe und Geschwindigkeit hat der Ball nach 1,0s ? Welche maximale Höhe erreicht er und wann schlägt er wieder am Boden auf? ($g = 10 \text{ ms}^{-2}$)

2. Die Auslenkung y eines Federpendels, das mit der Amplitude $A = 5,0 \text{ cm}$ und der Schwingungsdauer $T = 3,0 \text{ s}$ schwingt, lautet

$$y(t) = 5,0 \text{ cm} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{3,0 \text{ s}} \cdot t\right).$$



- a) Bestimmen Sie die maximale Geschwindigkeit nach „oben“. Wann tritt diese Geschwindigkeit jeweils auf?
- b) Bestimmen Sie zum Zeitpunkt $t_1 = 2,6 \text{ s}$ die Auslenkung $y(t_1)$, die Geschwindigkeit $v(t_1)$ und die Beschleunigung $a(t_1)$.
- c) Welche maximale Beschleunigung erfährt der Pendelkörper? Bei welcher Auslenkung tritt diese maximale Beschleunigung auf?

Wirtschaft

3. Die Herstellungskosten einer Anzahl x gleicher Geräte wird durch die Kostenfunktion $K(x)$ beschrieben.

$$\text{Es gelte z.B. } K(x) = (0,0015 x^3 - 1,8 x^2 + 820 x + 5000) \text{ €}$$

- a) Überlegen Sie, welche Kosten durch jeden einzelnen der in $K(x)$ auftretenden Terme beschrieben wird. (Vorzeichen beachten!)
- b) Die Ableitung $K'(x)$ wird Grenzkostenfunktion genannt. Begründen Sie, dass $K'(x)$ angenähert angibt, welche Kosten für die Herstellung des Geräts mit der Nummer $x + 1$ anfallen.
- c) Bestimmen Sie die Grenzkostenfunktion für unser Beispiel. Für welche Anzahl x ergeben sich die kleinsten Grenzkosten?
- d) Für welche Anzahl an hergestellten Geräten liegen die Grenzkosten unter 150 € ?