

Mathematik * Q11 m4 * Aufgaben zur Ableitung

Folgende wichtige Ableitungs-Regeln sind bekannt:

$$(a \cdot f(x) + b \cdot g(x))' = a \cdot f'(x) + b \cdot g'(x) \quad (\text{Linearität der Ableitung})$$

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x) \quad (\text{Produktregel})$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{g(x) \cdot f'(x) - g'(x) \cdot f(x)}{g(x)^2} \quad (\text{Quotientenregel})$$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \quad (\text{Kettenregel})$$



Bekannte Ableitungen wichtiger Funktionen

$$f(x) = x^r \quad (r \in \mathbb{R}) \Rightarrow f'(x) = r \cdot x^{r-1}$$

$$f(x) = \sin(x) \Rightarrow f'(x) = \cos(x) \quad \text{und} \quad f(x) = \cos(x) \Rightarrow f'(x) = -\sin(x)$$

Aufgaben

1. Berechnen Sie die Ableitung $f'(x)$.

Bestimmen Sie – sofern möglich – alle Punkte des Graphen G_f mit waagrechter Tangente.

a) $f(x) = 3x^5 + 10x^3 - 45x$

b) $f(x) = 3x^5 + 5x^3 - 90x$

c) $f(x) = x \cdot (x^2 - 2x)^3$

d) $f(x) = (x+1)^3 \cdot (x^3 + x^2)^2$

e) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} \cdot (x^2 - x)$

f) $f(x) = \sqrt{2x} \cdot (x^3 + 3x)$

g) $f(x) = \frac{x^2 - x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

h) $f(x) = \frac{2x + 3}{\sqrt{x^2 + 1}}$

2. Bestimmen Sie alle Nullstellen und Extremwerte der Funktion f im Intervall $[0; 2\pi]$.

a) $f(x) = 2 \cdot \sin(x)$

b) $f(x) = 0,5 \cdot \cos(x)$

c) $f(x) = (\sin(x))^2$

d) $f(x) = (\sin(x))^2 + (\cos(x))^2$

e) $f(x) = 2 \cdot \sin(0,5x + \pi)$

f) $f(x) = 3 \cdot \sin\left(\frac{x}{3} + \pi\right)$

g) $f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} ; D_f = ?$

h) $f(x) = \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} ; D_f = ?$

3. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente im Punkt $P(0,5 \cdot \pi / ?)$ des Graphen der Funktion $f(x) = 2 \cdot \sin(3 \cdot x - 0,25 \cdot \pi)$.

4. Bestimmen Sie alle Schnittpunkte der Graphen von $f(x) = \sin(x)$ und $g(x) = \cos(x)$ im Intervall $[0; \pi]$.

Unter welchem Winkel schneiden sich die Graphen dabei?

Mathematik * Q11 m4 * Aufgaben zur Ableitung * Lösungen

1. a) $f(x) = 3x^5 + 10x^3 - 45x \Rightarrow f'(x) = 15x^4 + 30x^2 - 45 = 15 \cdot (x^4 + 2x^2 - 3)$
 $f'(x) = 15 \cdot (x^2 - 1) \cdot (x^2 + 3)$ und $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 1$, $y_{1/2} = \mp 32$

b) $f(x) = 3x^5 + 5x^3 - 90x \Rightarrow f'(x) = 15x^4 + 15x^2 - 90 = 15 \cdot (x^4 + x^2 - 6)$
 $f'(x) = 15 \cdot (x^2 - 2) \cdot (x^2 + 3)$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm \sqrt{2}$; $y_{1/2} = \mp 68 \cdot \sqrt{2}$

c) $f(x) = x \cdot (x^2 - 2x)^3 \Rightarrow f'(x) = (x^2 - 2x)^3 + x \cdot 3 \cdot (x^2 - 2x)^2 \cdot (2x - 2) =$
 $(x^2 - 2x)^2 \cdot [7x^2 - 8x] = x^2 \cdot (x - 2)^2 \cdot x \cdot (7x - 8) = x^3 \cdot (x - 2)^2 \cdot (7x - 8)$
 $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$, $y_1 = 0$ (dreifache NSt.), $x_2 = 2$, $y_2 = 0$ (zweifache NSt.),
 $x_3 = \frac{8}{7}$, $y_3 = -\frac{6^3 \cdot 8^4}{7^7} \approx -1,07$

d) $f(x) = (x+1)^3 \cdot (x^3 + x^2)^2 \Rightarrow$
 $f'(x) = 3 \cdot (x+1)^2 \cdot (x^3 + x^2)^2 + (x+1)^3 \cdot 2 \cdot (x^3 + x^2) \cdot (3x^2 + 2x) = \dots =$
 $(x+1)^2 \cdot (x^3 + x^2) \cdot [9x^3 + 13x^2 + 4x] = (x+1)^2 \cdot x^2 \cdot (x+1) \cdot x \cdot [9x^2 + 13x + 4] =$
 $x^3 \cdot (x+1)^3 \cdot 9 \cdot (x+1) \cdot (x + \frac{4}{9}) = 9 \cdot x^3 \cdot (x+1)^4 \cdot (x + \frac{4}{9})$
 4-fache NSt. bei $x_1 = -1$ ($y_1 = 0$), 3-fache NSt. bei $x_2 = 0$ ($y_2 = 0$),
 einfache NSt. bei $x_3 = -\frac{4}{9}$ ($y_3 = \frac{5^5 \cdot 4^4}{9^9} \approx 0,002$)

e) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} \cdot (x^2 - x) \Rightarrow f'(x) = \frac{2x}{2 \cdot \sqrt{x^2 + 1}} \cdot (x^2 - x) + \sqrt{x^2 + 1} \cdot (2x - 1) = \dots =$
 $\frac{x \cdot (x^2 - x) + (x^2 + 1) \cdot (2x - 1)}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{3x^3 - 2x^2 + 2x - 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

Lösungen von $f'(x) = 0$ nicht erkennbar, obwohl es mindestens eine Lösung geben muss.

f) $f(x) = \sqrt{2x} \cdot (x^3 + 3x) \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{2 \cdot \sqrt{2x}} \cdot (x^3 + 3x) + \sqrt{2x} \cdot (3x^2 + 3) = \dots =$
 $\frac{(x^3 + 3x) + 2x \cdot (3x^2 + 3)}{\sqrt{2x}} = \frac{7x^3 + 9x}{\sqrt{2x}} = \frac{\sqrt{x} \cdot (7x^2 + 9)}{\sqrt{2}}$

$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0$ waagrechte Tangente bei (0/0).



g) $f(x) = \frac{x^2 - x}{\sqrt{x^2 + 1}} \Rightarrow f'(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1} \cdot (2x - 1) - \frac{2x}{2 \cdot \sqrt{x^2 + 1}} \cdot (x^2 - x)}{(x^2 + 1)} =$
 $\frac{(x^2 + 1) \cdot (2x - 1) - x \cdot (x^2 - x)}{\sqrt{x^2 + 1} \cdot (x^2 + 1)} = \frac{x^3 + 2x - 1}{\sqrt{x^2 + 1} \cdot (x^2 + 1)}$

Lösungen von $f'(x) = 0$ nicht erkennbar, obwohl es mindestens eine Lösung geben muss.

Wegen $f'(0) = -1 < 0$ und $f'(1) = \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$ gibt es in $[0; 1]$ eine waagrechte Tangente.

h) $f(x) = \frac{2x + 3}{\sqrt{x^2 + 1}} \Rightarrow f'(x) = \frac{2 \cdot \sqrt{x^2 + 1} - \frac{2x}{2 \cdot \sqrt{x^2 + 1}} \cdot (2x + 3)}{x^2 + 1} = \frac{2 - 3x}{(x^2 + 1) \cdot \sqrt{x^2 + 1}}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{2}{3}$; $y_1 = \sqrt{13}$

2. a) $f(x) = 2 \cdot \sin(x)$; $f(x) = 0 \Leftrightarrow \sin(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$; $x_2 = \pi$; $x_3 = 2\pi$
 $f'(x) = 2 \cdot \cos(x)$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_4 = \frac{\pi}{2}$ HOP($\frac{\pi}{2}$; 2); $x_5 = \frac{3 \cdot \pi}{2}$ TIP($\frac{3\pi}{2}$; -2)
- b) $f(x) = 0,5 \cdot \cos(x)$; $f(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{\pi}{2}$; $x_2 = \frac{3 \cdot \pi}{2}$
 $f'(x) = -0,5 \cdot \sin(x)$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_3 = 0$ HOP(0/0,5); $x_4 = \pi$ TIP(π /-0,5);
 $x_5 = 2\pi$ HOP(2π /0,5)
- c) $f(x) = (\sin(x))^2$; $f(x) = 0 \Leftrightarrow \sin(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$; $x_2 = \pi$; $x_3 = 2\pi$
 $f'(x) = 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$; $x_2 = \pi$; $x_3 = 2\pi$; $x_4 = 0,5\pi$; $x_5 = 1,5\pi$
Tiefpunkte bei (0/0) , (π /0) und (2π /0), Hochpunkte bei (0,5 π /1) und (1,5 π /1)
- d) $f(x) = (\sin(x))^2 + (\cos(x))^2 = 1$ also keine Nullstellen!
 $f'(x) = 0$ [$f'(x) = 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) + 2 \cdot \cos(x) \cdot (-\sin(x)) = 0$]
(Graph hat an allen Punkten waagrechte Tangenten.)
- e) $f(x) = 2 \cdot \sin(0,5x + \pi)$; $f(x) = 0 \Leftrightarrow 0,5x_z + \pi = z \cdot \pi$ mit $z \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$
 $x_z = 2 \cdot (z-1) \cdot \pi$ mit $z \in \mathbb{Z}$; hier $x_1 = 0$, $x_2 = 2\pi$
 $f'(x) = 2 \cdot \cos(0,5x + \pi) \cdot 0,5 = \cos(0,5x + \pi)$;
 $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 0,5x_z + \pi = \frac{2z+1}{2} \cdot \pi$ mit $z \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x_z = (2z-1) \cdot \pi$; hier $x_3 = \pi$ (TIP)
- f) $f(x) = 3 \cdot \sin(\frac{x}{3} + \pi)$; $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x_z}{3} + \pi = z \cdot \pi$ mit $z \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x_z = 3 \cdot (z-1) \cdot \pi$;
hier nur $x_1 = 0$;
 $f'(x) = 3 \cdot \cos(\frac{x}{3} + \pi) \cdot \frac{1}{3} = \cos(\frac{x}{3} + \pi)$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x_z}{3} + \pi = \frac{(2z+1) \cdot \pi}{2}$ mit $z \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$
 $x_z = \frac{3 \cdot (2z-1) \cdot \pi}{2}$ hier $x_1 = \frac{3 \cdot \pi}{2}$ TIP($\frac{3 \cdot \pi}{2}$; -3)
- g) $f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$; $D_f = \mathbb{R} \setminus \{ \frac{(2z+1) \cdot \pi}{2} / z \in \mathbb{Z} \}$
 $f(x) = 0 \Leftrightarrow \sin(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$; $x_2 = \pi$; $x_3 = 2\pi$
 $f'(x) = \frac{\cos(x) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot (-\sin(x))}{(\cos(x))^2} = \frac{(\cos(x))^2 + (\sin(x))^2}{(\cos(x))^2} = \frac{1}{(\cos(x))^2} = 1 + (\tan(x))^2$
 $f'(x) = 0$ hat keine Lösung, denn $f'(x) \geq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
- h) $f(x) = \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$; $D_f = \mathbb{R} \setminus \{ z \cdot \pi / z \in \mathbb{Z} \}$
 $f(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{\pi}{2}$; $x_2 = \frac{3 \cdot \pi}{2}$
 $f'(x) = \frac{\sin(x) \cdot (-\sin(x)) - \cos(x) \cdot \cos(x)}{(\sin(x))^2} = - \frac{(\sin(x))^2 + (\cos(x))^2}{(\sin(x))^2} = - \frac{1}{(\sin(x))^2} =$
 $f'(x) = -1 - (\cot(x))^2$
 $f'(x) = 0$ hat keine Lösung, denn $f'(x) \leq -1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.



3. $f(x) = 2 \cdot \sin(3 \cdot x - 0,25 \cdot \pi)$; $P(0,5\pi ; y_p)$

$$y_p = f(0,5\pi) = 2 \cdot \sin(3 \cdot 0,5\pi - 0,25 \cdot \pi) = 2 \cdot \sin(1,25\pi) = -2 \cdot 0,5 \cdot \sqrt{2} = -\sqrt{2}$$

$$f'(x) = 2 \cdot \cos(3 \cdot x - 0,25 \cdot \pi) \cdot 3 = 6 \cdot \cos(3 \cdot x - 0,25 \cdot \pi)$$

$$m = f'(0,5\pi) = 6 \cdot \cos(1,25 \cdot \pi) = -3 \cdot \sqrt{2}$$

Tangente: $g(x) = m \cdot x + t$ mit $m = -3 \cdot \sqrt{2}$ und $g(x_p) = y_p \Rightarrow$

$$-\sqrt{2} = -3 \cdot \sqrt{2} \cdot 0,5\pi + t \Rightarrow t = 3 \cdot \sqrt{2} \cdot 0,5\pi - \sqrt{2} = \sqrt{2} \cdot (1,5\pi - 1) \text{ also}$$

$$g(x) = -3 \cdot \sqrt{2} \cdot x + \sqrt{2} \cdot (1,5\pi - 1) ; g(x) \approx -4,24 \cdot x + 5,25$$

4. $f(x) = \sin(x)$ und $g(x) = \cos(x)$;

Schnittpunkte der Graphen in $[0 ; \pi]$:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \sin(x) = \cos(x) \Leftrightarrow \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = 1 \Leftrightarrow \tan(x) = 1 \Leftrightarrow$$

$$x_1 = 0,25 \cdot \pi ; y_1 = 0,5 \cdot \sqrt{2} \text{ also nur ein Schnittpunkt } S(0,25 \cdot \pi ; 0,5 \cdot \sqrt{2})$$

Schnittwinkel φ der Tangenten:

$$f'(x) = \cos(x) \text{ und } g'(x) = -\sin(x) ;$$

$$m_1 = f'(0,25\pi) = 0,5 \cdot \sqrt{2} \text{ und } m_2 = g'(0,25\pi) = -0,5 \cdot \sqrt{2}$$

$$\tan(\varphi) = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} \right| = \left| \frac{\sqrt{2}}{1 - 0,5} \right| = \left| \frac{\sqrt{2}}{0,5} \right| = 2 \cdot \sqrt{2} \Rightarrow \varphi = 70,528...^\circ \approx 70,5^\circ$$

