

Q12 * Mathematik * Erwartungswert und Varianz einer Zufallsgröße

1. Die Tabelle zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße X .

x	-2	2	4	5
$P(X = x)$	0,4	0,1	?	0,2

- a) Bestimmen Sie $P(X = 4)$ und den Erwartungswert $E(X)$.
b) Bestimmen Sie die Varianz $\text{Var}(X)$.



2. Die Tabelle zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße X .

x	-2	1	3	4
$P(X = x)$	0,3	0,2	a	b

- a) Bestimmen Sie a und b so, dass für den Erwartungswert von X gilt $E(X) = 1,5$.
b) Berechnen Sie nun noch die Standardabweichung von X .

3. In einer Urne befinden sich sechs 50-Cent-Münzen, drei 1€-Münzen und eine 2€-Münze. Es werden zufällig zwei Münzen (ohne Zurücklegen) herausgenommen.

$X =$ „Geldbetrag der beiden gezogenen Münzen“

- a) Erstellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X und berechnen Sie den Erwartungswert $E(X)$.
b) Bestimmen Sie nun die Standardabweichung von X .

4. Peter bietet folgendes Spiel zu einem Einsatz von x € an.

Es werden 2 Würfel geworfen. Wenn der Betrag der Augendifferenz größer als 3 ist, so erhält der Spieler seinen Einsatz zurück und zusätzlich 5,00 €.

Welchen Einsatz muss Peter mindestens verlangen, wenn er durchschnittlich pro Spiel mindestens 10 Cent gewinnen will?

5. In einer Urne befinden sich 8 weiße und 2 rote Kugeln.

- a) Es werden zufällig zwei Kugeln ohne Zurücklegen entnommen.

Wie viele rote Kugeln kann man durchschnittlich erwarten?

- b) Es werden 3 Kugeln ohne Zurücklegen entnommen.

Wie viele rote Kugeln kann man durchschnittlich erwarten?

6. Hans würfelt mit einem L-Würfel 5-mal hintereinander.

Die Zufallsgröße X gibt dabei die Anzahl der geworfenen „Sechser“ an.

Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X an

und zeigen Sie, dass $E(x) = \frac{5}{6}$ gilt.



Q12 * Mathematik * Erwartungswert und Varianz einer Zufallsgröße * Lösungen

1. a) $P(X=4) = 1 - 0,4 - 0,1 - 0,2 = 0,3$

$E(X) = -2 \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,3 + 5 \cdot 0,2 = 1,6$

b) $\text{Var}(X) = (-2-1,6)^2 \cdot 0,4 + (2-1,6)^2 \cdot 0,1 + (4-1,6)^2 \cdot 0,3 + (5-1,6)^2 \cdot 0,2 = 9,24$



2. a) (1) $1 = 0,3 + 0,2 + a + b \Leftrightarrow a + b = 0,5 \Leftrightarrow b = 0,5 - a$

(2) $E(X) = 1,5 \Leftrightarrow -0,6 + 0,2 + 3a + 4b = 1,5 \Leftrightarrow 3a + 4b = 1,9$

(1) in (2) $3a + 4 \cdot (0,5 - a) = 1,9 \Leftrightarrow 3a + 2 - 4a = 1,9 \Leftrightarrow 0,1 = a$

Also $a = 0,1$ und $b = 0,4$

b) $\text{Var}(X) = (-2-1,5)^2 \cdot 0,3 + (1-1,5)^2 \cdot 0,2 + (3-1,5)^2 \cdot 0,1 + (4-1,5)^2 \cdot 0,4 = 6,45$

3. a)

x	1€	1,50€	2,50€	2,0€	3€
P(X = x)	$\frac{30}{90}$	$\frac{36}{90}$	$\frac{12}{90}$	$\frac{6}{90}$	$\frac{6}{90}$

$E(X) = \frac{30€}{90} + \frac{54€}{90} + \frac{30€}{90} + \frac{12€}{90} + \frac{18€}{90} = \frac{144€}{90} = 1,60€$

b) $\text{Var}(X) = \frac{1}{90} [(-0,60€)^2 \cdot 30 + (-0,10€)^2 \cdot 36 + (0,90€)^2 \cdot 12 + (0,40€)^2 \cdot 6 + (1,40€)^2 \cdot 6] =$

$\text{Var}(X) = \frac{28}{75} €^2 \approx 0,37 €^2$ und $\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)} = \sqrt{\frac{28}{75}} €^2 = \frac{2 \cdot \sqrt{21}}{15} € \approx 0,61 €$

4. Z = „Reingewinn für Peter“

$E(Z) = \frac{5 \cdot x €}{6} + \frac{-5€}{6} = \frac{5 \cdot (x-1) €}{6}$

z	x €	-5,00 €
P(Z = z)	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

$E(Z) \geq 0,10 € \Leftrightarrow \frac{5 \cdot (x-1) €}{6} \geq 0,10 € \Leftrightarrow x \geq 1 + \frac{0,6}{5} = 1,12$

Peter muss also mindestens 1,12 € Einsatz verlangen.

5. X = „Anzahl roter Kugeln“

a) $E(X) = 0 \cdot \frac{28}{45} + 1 \cdot \frac{16}{45} + 2 \cdot \frac{1}{45} = \frac{17}{45} \approx 0,38$

x	0	1	2
P(X = x)	28/45	16/45	1/45

Durchschnittlich kann man 0,38 rote Kugeln erwarten.

b) $E(X) = 1 \cdot \frac{56}{120} + 2 \cdot \frac{8}{120} = \frac{3}{5} = 0,6$

x	0	1	2	3
P(X = x)	56/120	56/120	8/120	0

Durchschnittlich kann man 0,6 rote Kugeln erwarten.

6.

x	0	1	2	3	4	5
P(X = x)	$\frac{5^5}{6^5}$	$\frac{\binom{5}{1} \cdot 5^4}{6^5}$	$\frac{\binom{5}{2} \cdot 5^3}{6^5}$	$\frac{\binom{5}{3} \cdot 5^2}{6^5}$	$\frac{\binom{5}{4} \cdot 5}{6^5}$	$\frac{1}{6^5}$



$E(X) = \left(\binom{5}{1} \cdot 5^4 + 2 \cdot \binom{5}{2} \cdot 5^3 + 3 \cdot \binom{5}{3} \cdot 5^2 + 4 \cdot \binom{5}{4} \cdot 5 + 5 \cdot 1 \right) : 6^5 =$

$\frac{3125 + 2500 + 750 + 100 + 5}{7776} = \frac{6480}{7776} = \frac{5}{6}$