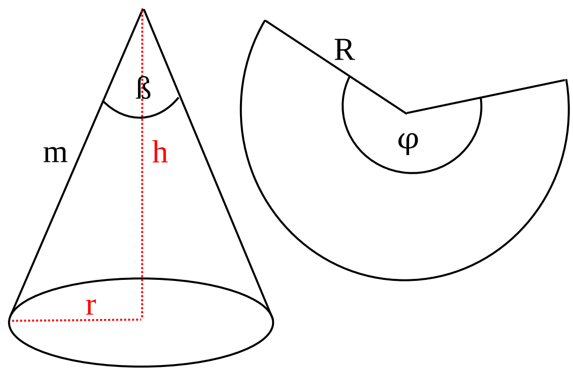
Mathematik * Jahrgangsstufe 9 * Aufgaben zum geraden Kegel

1. Das Bild zeigt einen geraden Kreiskegel und das zugehörige Netz der Mantelfläche.



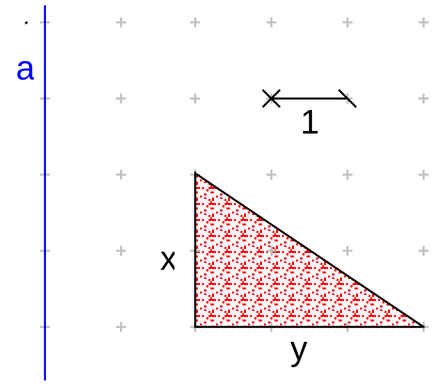
   a) Es sind bekannt ß = 60° und r = 5,0. Berechne m, h, R und φ sowie das Volumen V und den Oberflächeninhalt A.

   b) Es sind bekannt R = 4,0 und φ = 270°. Berechne m, h, r und ß sowie V und A.

   c) Es sind bekannt r = 3,0 und φ = 180°. Berechne m, h, R und ß sowie V und A.

2. Ein gerader Kreiskegel wird auf halber Höhe durch einen zur Grundfläche parallelen Schnitt in einen Kegel und einen Kegelstumpf zerlegt.
   Wie viel Prozent vom gesamten Kegelvolumen macht dann das Volumen des Kegelstumpfes aus?

3. Das rechtwinklige Dreieck mit den Katheten der Länge x = 2 und y = 3 rotiert um die Achse a.



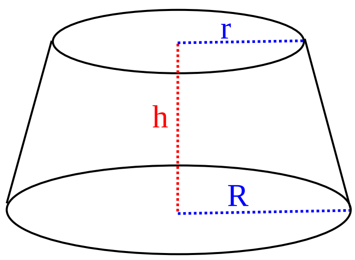
   a) Beschreibe den entstehenden Körper und skizziere ein Schrägbild, bei dem unsichtbare Kanten gestrichelt sind.

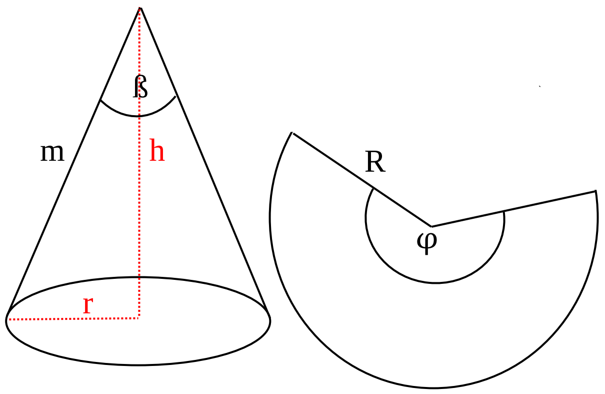
   b) Berechne das Volumen und den Oberflächeninhalt des Rotationskörpers.

4. In der Mathematik-Formelsammlung findet man die folgende Formel für das Volumen eines Kegelstumpfes:

$$V = \frac{h \cdot \pi}{3}\left(R^2 + R\,r + r^2\right)$$

   Bestätige diese Formel mit einer geeigneten Rechnung.





1. a) $\frac{r}{m} = \sin\frac{\beta}{2} \Rightarrow m = \frac{5,0}{\sin 30^o} = 10$

$h^2 = m^2 - r^2 \Rightarrow h = \sqrt{100-25} = 5\cdot\sqrt{3}$

$R = m = 10$

$2\cdot\pi\cdot r = 2\cdot\pi\cdot R\cdot\frac{\varphi}{360^o} \Rightarrow$

$\varphi = \frac{r}{m}\cdot 360^o = \frac{5\cdot 360^o}{10} = 180^o$

$V = \frac{1}{3}\cdot r^2\cdot\pi\cdot h = \frac{1}{3}\cdot 5^2\cdot\pi\cdot 5\cdot\sqrt{3} = \frac{125\cdot\sqrt{3}}{3}\pi \approx 226,7$

$A = r^2\cdot\pi + r\cdot\pi\cdot m = r\cdot\pi\cdot(r+m) = 5\cdot\pi\cdot(5+10) = 75\cdot\pi \approx 235,6$

b) $m = R = 4$ und $\frac{r}{m} = \sin\frac{\beta}{2} \Rightarrow \beta = 2\cdot\sin^{-1}(\frac{3}{4}) \approx 97,2^o$

$h^2 = m^2 - r^2 \Rightarrow h = \sqrt{16-9} = \sqrt{7}$

$V = \frac{1}{3}\cdot r^2\cdot\pi\cdot h = \frac{1}{3}\cdot 9\cdot\pi\cdot\sqrt{7} = 3\cdot\sqrt{7}\cdot\pi \approx 24,9$ und $A = r\cdot\pi\cdot(r+m) = 21\cdot\pi \approx 66,0$

c) $\frac{r}{m} = \frac{180^o}{360^o} \Rightarrow m = 2\cdot r = 6$ und $R = m = 6$

$\sin\frac{\beta}{2} = \frac{r}{m} = \frac{1}{2} \Rightarrow \beta = 2\cdot\sin^{-1}(\frac{1}{2}) = 60^o$ und $h = \sqrt{m^2 - r^2} = \sqrt{36-9} = 3\cdot\sqrt{3}$

$V = \frac{1}{3}\cdot r^2\cdot\pi\cdot h = \frac{1}{3}\cdot 9\cdot\pi\cdot 3\sqrt{3} = 9\cdot\sqrt{3}\cdot\pi \approx 49,0$ und $A = r\cdot\pi\cdot(r+m) = 27\cdot\pi \approx 84,8$

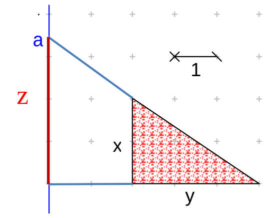
2. Großer Kegel mit $r_g = r$ und $h_g = h$ und kleiner Kegel mit $r_k = 0,5\,r$ und $h_k = 0,5\,h$.

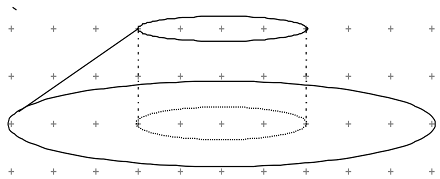
$V_g = \frac{1}{3}\cdot r^2\cdot\pi\cdot h$ und $V_k = \frac{1}{3}\cdot(\frac{1}{2}r)^2\cdot\pi\cdot(\frac{1}{2}h) = \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{3}\cdot r^2\cdot\pi\cdot h = \frac{1}{8}\cdot V_g$

$V_{Kegelstumpf} = \frac{7}{8}\cdot V_g = 87,5\%$ von V_g

3. b) Strahlensatz:

a)





$\frac{z}{x} = \frac{y+2}{y} \Rightarrow z = 2\cdot\frac{2+3}{3} = \frac{10}{3}$

$V = \frac{1}{3}(2+y)^2\pi\cdot z - \frac{1}{3}(2)^2\pi\cdot(z-x) - 2^2\pi\cdot x$

$V = \frac{1}{3}\cdot 25\cdot\pi\cdot\frac{10}{3} - \frac{1}{3}\cdot 4\cdot\pi\cdot\frac{4}{3} - 4\cdot\pi\cdot 2$

$V = (\frac{250}{9} - \frac{16}{9} - 8)\cdot\pi = 18\cdot\pi \approx 56,5$

$m_1 = \sqrt{z^2 + (2+y)^2} = \frac{5\sqrt{13}}{3}$ und $m_2 = \sqrt{2^2 + (z-x)^2} = \frac{2\sqrt{13}}{3}$

$A = (M_1 - M_2) + (K_1 - K_2) + M_3$ mit $M_1 = (2+y)\cdot\pi\cdot m_1 = 5\pi\cdot\frac{5\sqrt{13}}{3} = \frac{25\sqrt{13}}{3}$ und

$M_2 = 2\cdot\pi\cdot m_2 = 2\pi\cdot\frac{2\sqrt{13}}{3} = \frac{4\sqrt{13}}{3}$ und $K_1 = 5^2\pi = 25\pi$ und $K_2 = 2^2\pi = 4\pi$ und

$M_3 = 2\pi\cdot 2\cdot x = 8\pi \Rightarrow A = \frac{21\sqrt{13}}{3}\pi + 21\pi + 8\pi = (29 + 7\sqrt{13})\pi \approx 170,4$

4. Strahlensatz

$$\frac{R}{r} = \frac{x+h}{x} = 1 + \frac{h}{x} \;\Rightarrow\; \frac{h}{x} = \frac{R}{r} - 1 = \frac{R-r}{r} \;\Rightarrow\; x = h \cdot \frac{r}{R-r} = \frac{h \cdot r}{R-r}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \left[R^2\pi \cdot (x+h) - r^2\pi \cdot x \right] = \frac{\pi}{3} \cdot \left[R^2(x+h) - r^2 x \right] =$$

$$\frac{\pi}{3} \cdot \left[(R^2 - r^2) \cdot x + R^2 h \right] = \frac{\pi}{3} \cdot \left[(R^2 - r^2) \cdot \frac{h \cdot r}{R-r} + R^2 h \right] =$$

$$\frac{\pi}{3} \cdot \left[(R^2 - r^2) \cdot \frac{h \cdot r}{R-r} + R^2 h \right] =$$

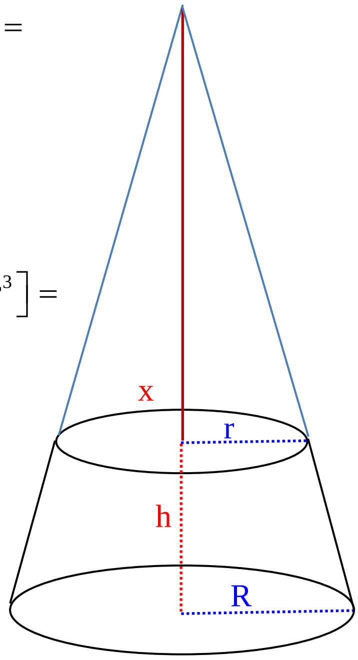
$$\frac{\pi \cdot h}{3 \cdot (R-r)} \cdot \left[(R^2 - r^2) \cdot r + R^2 \cdot (R-r) \right] =$$

$$\frac{\pi \cdot h}{3 \cdot (R-r)} \cdot \left[R^2 r - r^3 + R^3 - R^2 \cdot r \right] = \frac{\pi \cdot h}{3 \cdot (R-r)} \cdot \left[R^3 - r^3 \right] =$$

$$\frac{\pi \cdot h}{3 \cdot (R-r)} \cdot \left[(R^2 + Rr + r^2) \cdot (R-r) \right]^{*} =$$

$$\frac{\pi \cdot h \cdot (R^2 + Rr + r^2) \cdot (R-r)}{3 \cdot (R-r)} = \frac{\pi \cdot h \cdot (R^2 + Rr + r^2)}{3} =$$

$$\frac{\pi \cdot h}{3} \cdot (R^2 + Rr + r^2)$$



* denn $(R^2 + Rr + r^2) \cdot (R-r) =$

$R^3 + R^2 r + Rr^2 - R^2 r - Rr^2 - r^3 = R^3 - r^3$