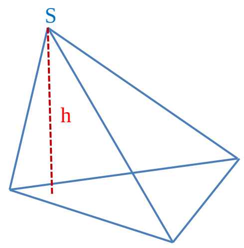
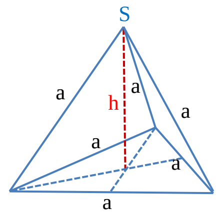
Mathematik * Jahrgangsstufe 9 * Pyramiden und ihr Oberflächeninhalt A

Eine n-seitige Pyramide hat ein n-Eck als Grundfläche.
Der Abstand der Spitze S von der Grundfläche heißt Höhe h der Pyramide.
Eine Pyramide heißt gerade, wenn alle Seitenkanten gleich lang sind. (Andernfalls heißt sie schief.)
Eine gerade dreiseitige Pyramide mit sechs gleich langen Kanten heißt Tetraeder.



Dreiseitige schiefe Pyramide



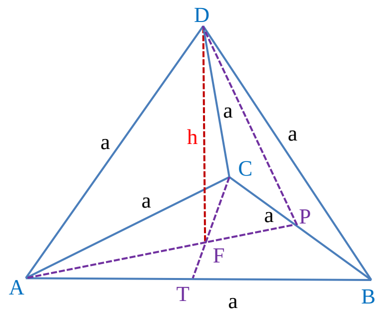
Tetraeder

1. Das Bild zeigt ein Tetraeder mit der Kantenlänge $a = 4$.

   a) Begründe, warum der Fußpunkt F der Pyramidenhöhe der Schwerpunkt des gleichseitigen Dreiecks ABC ist.

   b) Berechne die Streckenlängen $\overline{AP}$, $\overline{AF}$ und dann die Höhe h des Tetraeders.

   c) Berechne den Oberflächeninhalt des Tetraeders.



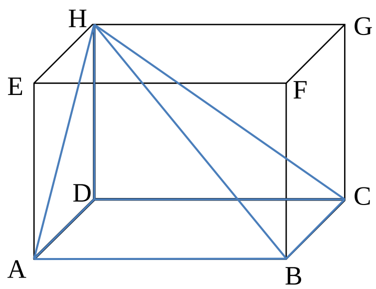
2. Das Bild zeigt die Pyramide ABCDH, die einem Quader ABCDEFGH mit den Seiten $\overline{AB} = 5$, $\overline{BC} = 4$ und $\overline{AE} = 3$ einbeschrieben ist.

   a) Zeichne ein Schrägbild der Pyramide mit $\omega = 45^{\circ}$ und $q = 0{,}5$ $(1\text{LE} \mathrel{\hat{=}} 1\text{cm})$.
   (Die Strecken [AB] und [AE] sollen wie im Bild parallel zur Zeichenebene liegen.)

   b) Berechne die Länge der Seitenkanten der Pyramide ABCDH!

   c) Berechne den Oberflächeninhalt der Pyramide ABCDH.

   d) Berechne die Winkel, unter denen sich die Seitenkanten im Punkt H treffen.



3. Das Bild zeigt eine vierseitige Pyramide ABCDE, dessen Grundfläche eine Raute ABCD mit den Diagonallängen $\overline{AC} = 8$ und $\overline{BD} = 6$.

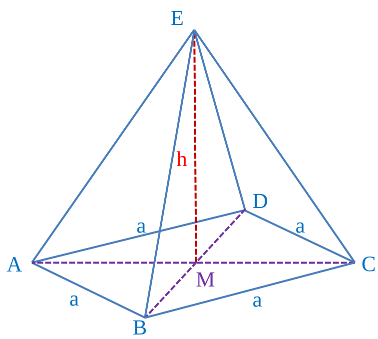
   Die Höhe der Pyramide hat die Länge $h = \overline{ME} = 6$.

   a) Zeichne eine Schrägbild der Pyramide mit $\omega = 45^{\circ}$ und $q = 0{,}5 \cdot \sqrt{2}$ $(1\text{LE} \mathrel{\hat{=}} 1\text{cm})$.
   Die Diagonale [AC] soll dabei parallel zur Zeichenebene liegen.

   b) Berechne die Kantenlänge a der Raute ABCD.

   c) Berechne die Länge der vier Seitenkanten.

   d) Schwere Aufgabe für Experten:
   Berechne den Oberflächeninhalt der Pyramide!



Mathematik * Jahrgangsstufe 9 * Pyramiden und ihr Oberflächeninhalt A

1. a) Die Höhe der Pyramide muss aus Symmetriegründen jede der drei Seitenhalbierenden im gleichseitigen Dreieck der Grundfläche treffen. Daher stimmt der Fußpunkt der Pyramidenhöhe mit dem Schwerpunkt des Dreiecks ABC überein.

b) $\overline{AP}^2 + (\frac{a}{2})^2 = a^2 \Rightarrow \overline{AP}^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} \Rightarrow \overline{AP}^2 = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow \overline{AP} = \frac{\sqrt{3}}{2} a = 2 \cdot \sqrt{3}$ für $a = 4$

Die Seitenhalbierenden eines Dreiecks teilen sich im Verhältnis 2 : 1 , d.h.

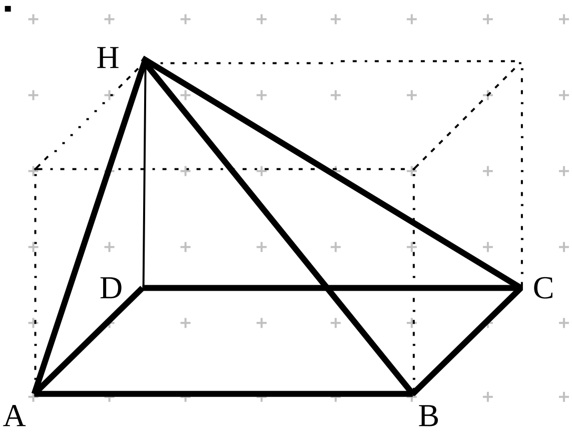
$\overline{AF} = \frac{2}{3} \cdot \overline{AP} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{\sqrt{3}}{3} a = \frac{4 \cdot \sqrt{3}}{3}$ und $\overline{FP} = \frac{1}{3} \cdot \overline{AP} = \frac{\sqrt{3}}{6} a = \frac{4 \cdot \sqrt{3}}{6} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3}$

$\overline{AF}^2 + h^2 = a^2 \Rightarrow h^2 = a^2 - \overline{AF}^2 \Rightarrow h^2 = a^2 - \frac{3a^2}{9} \Rightarrow h^2 = \frac{2a^2}{3} \Rightarrow$

$h = \sqrt{\frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 3}} a = \frac{\sqrt{6}}{3} a = \frac{4 \cdot \sqrt{6}}{3}$

c) $A_{Tetraeder} = 4 \cdot A_{\Delta ABC} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot \overline{AP} = 2 \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a = \sqrt{3} a^2 = 16 \cdot \sqrt{3}$ mit $a = 4$

2. a) siehe Bild!



b) $\overline{AH}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{HD}^2 = 4^2 + 3^2 = 25 \Rightarrow \overline{AH} = 5$

$\overline{HD} = \overline{AE} = 3$

$\overline{CH}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{HD}^2 = 5^2 + 3^2 \Rightarrow \overline{CH} = \sqrt{34}$

$\overline{BH}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AH}^2 = 5^2 + 5^2 \Rightarrow \overline{AH} = 5\sqrt{2}$

c) $A_{Pyramide} =$

$A_{ABCD} + A_{\Delta ADH} + A_{\Delta HDC} + A_{\Delta ABH} + A_{BCH} =$

$5 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{34} =$

$20 + 6 + 7{,}5 + 12{,}5 + 2\sqrt{34} = 46 + 2\sqrt{34} \approx 57{,}7$

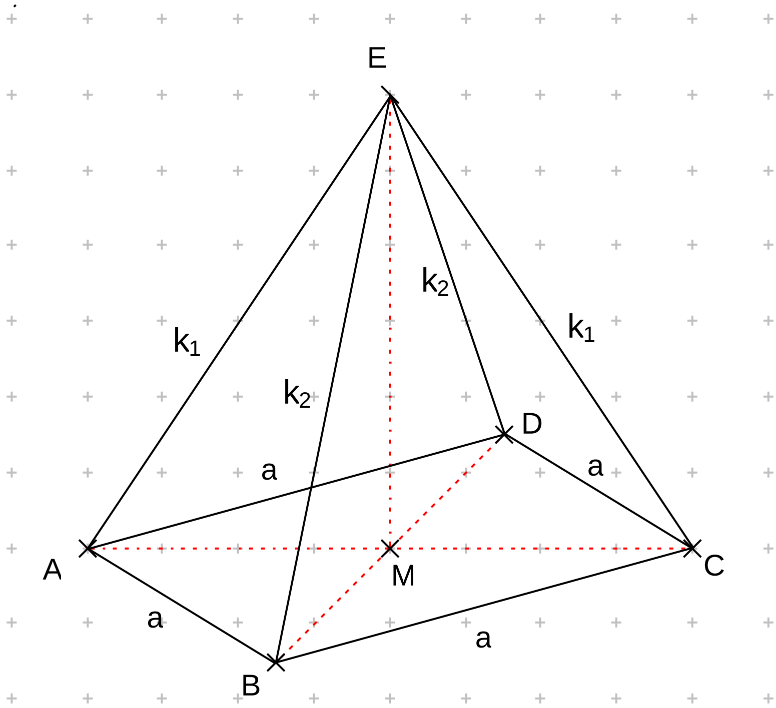
d) Für $\alpha = \sphericalangle AHB$ gilt: $\tan\alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{AH}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha \approx 35{,}3^\circ$

Für $\beta = \sphericalangle BHC$ gilt: $\tan\beta = \frac{\overline{BC}}{\overline{CH}} = \frac{4}{\sqrt{34}} \Rightarrow \beta \approx 34{,}4^\circ$

Für $\gamma = \sphericalangle DHC$ gilt: $\tan\gamma = \frac{\overline{DC}}{\overline{DH}} = \frac{5}{3} \Rightarrow \gamma \approx 59{,}0^\circ$

Für $\delta = \sphericalangle AHD$ gilt: $\tan\delta = \frac{\overline{AD}}{\overline{DH}} = \frac{4}{3} \Rightarrow \delta \approx 53{,}1^\circ$

3. a) Siehe Bild!



b) $\overline{AM} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} = 4$ und

$\overline{BM} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BD} = 3$

$a^2 = \overline{BM}^2 + \overline{AM}^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow$

$a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$

c) $k_1^2 = \overline{AM}^2 + h^2 = 4^2 + 6^2 \Rightarrow$

$k_1 = \sqrt{52} = 2 \cdot \sqrt{13}$

$k_2^2 = \overline{BM}^2 + h^2 = 3^2 + 6^2 \Rightarrow$

$k_2 = \sqrt{45} = 3 \cdot \sqrt{5}$

d) $A_{Pyramide} =$

$$A_{ABCD} + 2 \cdot A_{\Delta ABE} + 2 \cdot A_{\Delta BCE} = 2 \cdot A_{\Delta ABC} + 4 \cdot A_{\Delta ABE} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BM} + 4 \cdot A_{\Delta ABE}$$

$A_{Pyramide} = 24 + 4 \cdot A_{\Delta ABE}$

Die Berechnung von $A_{\Delta ABE}$ ist etwas schwieriger!

Die Höhe im Dreieck ABE sei mit x bezeichnet.

Dann gilt:

(1) $k_1^2 = x^2 + y^2 = 52 \Rightarrow x^2 = 52 - y^2$

(2) $k_2^2 = x^2 + z^2 = 45 \Rightarrow x^2 = 45 - z^2$

(3) $z + y = a = 5 \Rightarrow z = 5 - y$

Aus (1) und (2) folgt

$52 - y^2 = 45 - z^2$ also $7 = y^2 - z^2$

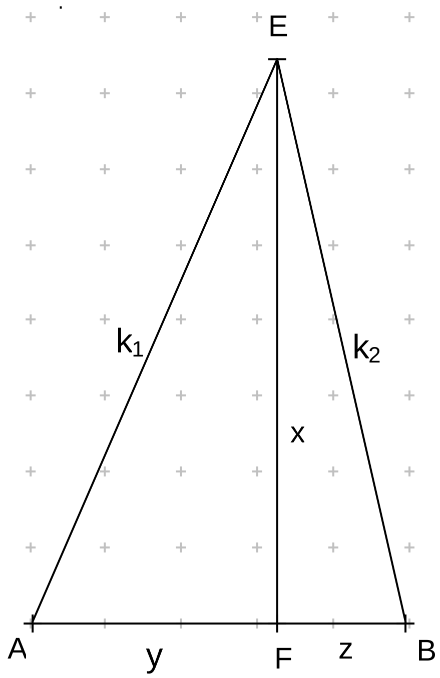
Mit (3) folgt damit

$7 = y^2 - (5-y)^2 = y^2 - 25 + 10y - y^2 = -25 + 10y$

Also $32 = 10y \Rightarrow y = 3{,}2$ und $z = 1{,}8$ und

$x^2 = 52 - 3{,}2^2 = 41{,}76$ also

$$x = \frac{\sqrt{4176}}{10} = \frac{12 \cdot \sqrt{29}}{10} = \frac{6 \cdot \sqrt{29}}{5}$$



Also

$$A_{Pyramide} = 24 + 4 \cdot A_{\Delta ABE} = 24 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot x = 24 + 2 \cdot 5 \cdot \frac{6 \cdot \sqrt{29}}{5} = 24 + 12 \cdot \sqrt{29} \approx 88{,}6$$