

## Mathematik \* Jahrgangsstufe 9 \* Permutationen und Teilmengen



### Permutationen

Der Mathekurs zählt 20 Schüler. Der Mathelehrer stellt die 20 Schüler in einer Reihe – alphabetisch sortiert nach den Anfangsbuchstaben der Nachnamen – auf .

Der Sportlehrer stellt die 20 Schüler dagegen der Größe nach sortiert in einer Reihe auf.

- Wie viele unterschiedliche Reihenfolgen des Aufstellens gibt es?
- Wie lange dauert es, bis alle diese Aufstellungen durchexerziert sind, wenn die Klasse in einer Sekunde 10 verschiedene Aufstellungen schafft?

### Anzahl der Teilmengen

Der Sportlehrer wählt aus der Klasse 9b mit insgesamt 20 Schülern für einen Wettkampf genau 12 Schüler aus.

- Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es dafür?
- Beim Wettkampf müssen von den 12 Mannschaftsmitgliedern 8 für den Anfangseinsatz ausgewählt werden. Wie viele unterschiedliche Möglichkeiten gibt es dafür?

### Merke:

Eine Menge aus  $n$  Elementen kann man auf  $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$  ( $n$  – Fakultät) verschiedene Möglichkeiten anordnen.

(Eine Umordnung von  $n$  Elementen nennt man auch **Permutation** der  $n$  Elemente.)

Aus einer Menge mit  $n$  Elementen kann man Teilmengen mit genau  $k$  Elementen ( $k \leq n$ )

auf genau  $\frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$  verschiedene Arten auswählen.

Für  $\frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$  schreibt man auch  $\binom{n}{k}$  und sagt dazu "n über k" oder "k aus n".

Man sagt: Aus einer Menge mit  $n$  Elementen kann man  $\binom{n}{k}$  verschiedene Teilmengen mit genau  $k$  Elementen auswählen.

### Aufgaben:

Prüfe jeweils, ob du besser mit einem Baumdiagramm oder den angegebenen Formeln arbeitest.

- Beim Zahlenlotto werden 6 aus 49 Ziffern angekreuzt. Wie viele Möglichkeiten gibt es?
- Bei einem privaten Tanz-Abend sind 5 Paare anwesend. Es gibt Damenwahl. Wie viele unterschiedlichen Möglichkeiten für die Paarungen gibt es?
- Bei einem Pferderennen sind 12 Pferde am Start. Bei der Dreier-Wette muss man die ersten drei Pferde in der richtigen Reihenfolge tippen.  
Wie viele unterschiedliche Möglichkeiten gibt es für diesen Dreier-Tipp?
- In einer Losurne befinden sich 100 Lose.  
90 Lose sind Nieten, 10 dagegen ergeben einen Gewinn. Hans zieht 5 Lose.  
Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat Hans
  - keinen Gewinn?
  - mindestens einen Gewinn?
  - genau ein Gewinnlos?
  - mehr als ein Gewinnlos?
- Peter zieht aus einem Stapel Karten (32 Karten mit den bekannten Werten) 5 Karten heraus.  
Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat er
  - 5 Herzkarten
  - kein Ass
  - nur Figuren (Buben, Damen, Könige)?
- Paul zieht aus einem Stapel Karten (32 Karten mit den bekannten Werten) 5 Karten heraus.  
Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht er
  - mit der ersten Karte ein Ass?
  - mit der letzten Karte kein Herz?
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit beim Wurf mit 6 Würfeln keine einzige 6 zu würfeln?
- Wie viele Möglichkeiten gibt es für einen Fußballtrainer, aus 23 Aktiven eine Mannschaft mit 11 Spielern auszuwählen?

## Mathematik \* Jahrgangsstufe 9 \* Permutationen und Teilmengen \* Lösungen

1. Es gibt  $\binom{49}{6} = \frac{49!}{(49-6)! \cdot 6!} = \frac{49!}{43! \cdot 6!} = 13983816$  Möglichkeiten.

(TR: **49 nCr 6**)



2. Es gibt  $5! = 120$  Möglichkeiten.

3. Es gibt  $12 \cdot 11 \cdot 10 = 1320$  Möglichkeiten. Man kann diese Anzahl auch noch so berechnen:

$$\binom{12}{3} \cdot 3! = 220 \cdot 6 = 1320 ; \text{ (TR: **49 nPr 6**)}$$

Wähle zuerst 3 der 12 Pferde aus (es gibt  $\binom{12}{3} = 220$  Möglichkeiten) und ordne sie dann auf  $3! = 6$  Arten an.

4. a)  $\frac{\binom{90}{5}}{\binom{100}{5}} \approx 58,4\%$

b)  $1 - P(\text{"kein Gewinn"}) = 1 - \frac{\binom{90}{5}}{\binom{100}{5}} \approx 41,6\%$

c)  $\frac{\binom{10}{1} \cdot \binom{90}{4}}{\binom{100}{5}} \approx 39,9\%$

d)  $1 - \frac{\binom{90}{5}}{\binom{100}{5}} - \frac{\binom{10}{1} \cdot \binom{90}{4}}{\binom{100}{5}} \approx 41,6\% - 39,9\% = 1,7\%$

5. a)  $\frac{\binom{8}{5}}{\binom{32}{5}} \approx 0,03\%$

b)  $\frac{\binom{28}{5}}{\binom{32}{5}} \approx 48,4\%$

c)  $\frac{\binom{12}{5}}{\binom{32}{5}} \approx 0,4\%$

6. a)  $\frac{\binom{4}{1}}{\binom{32}{1}} = 12,5\%$

b)  $\frac{\binom{24}{1}}{\binom{32}{1}} = 75\%$

7.  $\left(\frac{5}{6}\right)^6 = \frac{5^6}{6^6} \approx 33,5\%$

8.  $\binom{23}{11} = 1352078$  (wobei Torwart und Feldspieler nicht unterschieden werden)