Mathematik * Jahrgangsstufe 9 * Rechnen mit Wurzeln

Merke: Für $a \in R_0^+$ legt man fest: $\sqrt{a}$ ist die <u>positive</u> Zahl, für die gilt $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$

Für Wurzeln gelten die beiden folgenden Regeln:

$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$ und $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$ Zudem gilt:

Die quadratische Gleichung $x^2 = a$ hat für $a > 0$ die beiden Lösungen $x_1 = \sqrt{a}$ und $x_2 = -\sqrt{a}$.

Beachte: Es muss immer so weit wie möglich radiziert und der Nenner rational gemacht werden.

Also z.B. $\sqrt{12a^3} = \sqrt{4 \cdot 3 \cdot a^2 \cdot a} = 2 \cdot a \cdot \sqrt{3a}$ und $\dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \dfrac{2 \cdot \sqrt{3}}{3}$

Aufgaben:

1. Bestimme den Definitionsbereich des Terms!

   a) $\sqrt{2x - 3}$ b) $\sqrt{0,4x + 2}$ c) $\sqrt{x^2 + 1}$

   d) $\sqrt{4 - 0,2x}$ e) $\sqrt{4 - x^2}$ f) $\sqrt{x \cdot (2 - x)}$

   g) $\sqrt{\dfrac{2}{x}}$ h) $\sqrt{\dfrac{3}{2 + x}}$ k) $\dfrac{\sqrt{x + 1}}{1 + \sqrt{x}}$

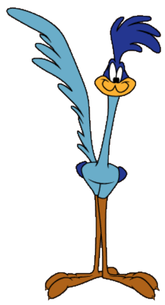
2. Vereinfache durch Ausmultiplizieren und Zusammenfassen

   a) $2\sqrt{6} \cdot \left(\sqrt{3} - 2\sqrt{2}\right) - \sqrt{10} \cdot \left(\sqrt{15} - \sqrt{30}\right)$ b) $\left(1 + \sqrt{3}\right)^2 - \left(1 - \sqrt{3}\right)^2$

   c) $\left(\sqrt{6} - 2\sqrt{2}\right)^2 - \sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{18} - \sqrt{150}\right)$ d) $\left(2 - 3\sqrt{5}\right)^2 - \left(1 + \sqrt{20}\right)^2$

   e) $\sqrt{8} \cdot \left(\sqrt{6} - 2\sqrt{5}\right) + \sqrt{5} \cdot \left(\sqrt{15} - \sqrt{2}\right) + \sqrt{2} \cdot \left(6\sqrt{5} - 5\sqrt{6}\right)$

3. Bestimme gegebenenfalls die Definitionsmenge und radiziere dann so weit wie möglich.

   a) $\sqrt{49 + 626}$ b) $\sqrt{960}$ c) $\sqrt{12 \cdot 28 \cdot 21}$

   d) $\sqrt{8ab^2}$ e) $\sqrt{18b^3c^2}$ f) $\sqrt{30a^2 \cdot 105c^3}$

   g) $\sqrt{250a^3b^4}$ h) $\sqrt{80x^6y^8z^5}$ i) $\sqrt{27a^3b^{50}}$

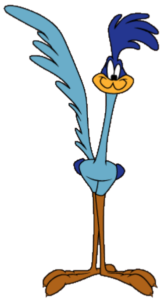
4. Vereinfache und mache den Nenner rational.

   a) $\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{15}}$ b) $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{75}}$ c) $\sqrt{12,5}$ d) $\sqrt{12,1}$ e) $\sqrt{4\frac{1}{2}} - \sqrt{3\frac{1}{8}}$

5. Bestimme alle Lösungen!

   a) $2x^2 - 3 = 4$ b) $0,5x^2 + 2 = 3$ c) $2 \cdot (x^2 - 1) = 5$ d) $(x - 3) \cdot (x + 3) = 1$

Mathematik * Jahrgangsstufe 9 * Rechnen mit Wurzeln * Lösungen



1. a) $D = [1{,}5\,;\,\infty[$ b) $D = [-5\,;\,\infty[$ c) $D = \mathbb{R}$
   d) $D =]-\infty\,;\,20\,]$ e) $D = [-2\,;\,2\,]$ f) $D = [\,0\,;\,2\,]$
   g) $D = \mathbb{R}^+ = \,]\,0\,;\,\infty[$ h) $D =]-2\,;\,\infty[$ k) $D = \mathbb{R}^+ = \,]\,0\,;\,\infty[$

2. a) $2\sqrt{6}\cdot\left(\sqrt{3}-2\sqrt{2}\right)-\sqrt{10}\cdot\left(\sqrt{15}-\sqrt{30}\right)=6\sqrt{2}-8\sqrt{3}-5\sqrt{6}+10\sqrt{3}=$
   $6\sqrt{2}+2\sqrt{3}-5\sqrt{6}$
   b) $\left(1+\sqrt{3}\right)^2-\left(1-\sqrt{3}\right)^2=1+2\sqrt{3}+3-\left(1-2\sqrt{3}+3\right)=4\sqrt{3}$
   c) $\left(\sqrt{6}-2\sqrt{2}\right)^2-\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{18}-\sqrt{150}\right)=6-4\sqrt{12}+8-6+10\sqrt{3}=8+2\sqrt{3}$
   d) $\left(2-3\sqrt{5}\right)^2-\left(1+\sqrt{20}\right)^2=4-12\sqrt{5}+45-\left(1+4\sqrt{5}+20\right)=28-16\sqrt{5}$
   e) $\sqrt{8}\cdot\left(\sqrt{6}-2\sqrt{5}\right)+\sqrt{5}\cdot\left(\sqrt{15}-\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}\cdot\left(6\sqrt{5}-5\sqrt{6}\right)=$
   $4\sqrt{3}-4\sqrt{10}+5\sqrt{3}-\sqrt{10}+6\sqrt{10}-10\sqrt{3}=\sqrt{10}-\sqrt{3}$

3. a) $\sqrt{49+626}=\sqrt{675}=\sqrt{25\cdot 9\cdot 3}=5\cdot 3\cdot\sqrt{3}=15\sqrt{3}$
   b) $\sqrt{960}=\sqrt{64\cdot 15}=8\sqrt{15}$
   c) $\sqrt{12\cdot 28\cdot 21}=\sqrt{4\cdot 3\cdot 4\cdot 7\cdot 3\cdot 7}=\sqrt{4^2\cdot 3^2\cdot 7^2}=4\cdot 3\cdot 7=84$
   d) $\sqrt{8ab^2}=\sqrt{4b^2\cdot 2a}=2|b|\cdot\sqrt{2a}$ $\quad(a\in\mathbb{R}_o^+\,;\; b\in\mathbb{R})$
   e) $\sqrt{18b^3c^2}=\sqrt{9\cdot b^2\cdot c^2\cdot 2b}=3\cdot b\cdot|c|\cdot\sqrt{2b}=3b|c|\sqrt{2b}$ $\quad(b\in\mathbb{R}_o^+\,;\; c\in\mathbb{R})$
   f) $\sqrt{30a^2\cdot 105c^3}=\sqrt{3\cdot 2\cdot 5\cdot a^2\cdot 5\cdot 3\cdot 7\cdot c^2\cdot c}=\sqrt{3^2\cdot 5^2\cdot a^2\cdot c^2\cdot 14c}=15|a|c\sqrt{14c}$ $\quad(a\in\mathbb{R};c\in\mathbb{R}_o^+)$
   g) $\sqrt{250a^3b^4}=5\cdot a\cdot b^2\cdot\sqrt{10a}$ mit $a\in\mathbb{R}_o^+$ und $b\in\mathbb{R}$
   h) $\sqrt{80x^6y^8z^5}=4\cdot|x^3|\cdot y^4\cdot z^2\cdot\sqrt{5z}$ mit $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}$, $z\in\mathbb{R}_o^+$
   i) $\sqrt{27a^3b^{50}}=3\cdot a\cdot|b^{25}|\cdot\sqrt{3a}$ mit $a\in\mathbb{R}_o^+$, $b\in\mathbb{R}$

4. a) $\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{15}}=\sqrt{\dfrac{4}{5}}=\sqrt{\dfrac{4\cdot 5}{5\cdot 5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ $\quad(=0{,}4\cdot\sqrt{5}\,)$ b) $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{75}}=\dfrac{2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{5\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{6}}{15}$
   c) $\sqrt{12{,}5}=\sqrt{\dfrac{25}{2}}=\sqrt{\dfrac{25\cdot 2}{2\cdot 2}}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ $\quad(=2{,}5\cdot\sqrt{2}\,)$
   d) $\sqrt{12{,}1}=\sqrt{\dfrac{121\cdot 10}{10\cdot 10}}=\dfrac{11\sqrt{10}}{10}$ $\quad(=1{,}1\cdot\sqrt{10}\,)$
   e) $\sqrt{4\frac{1}{2}}-\sqrt{3\frac{1}{8}}=\sqrt{\dfrac{9\cdot 2}{2\cdot 2}}-\sqrt{\dfrac{25\cdot 2}{8\cdot 2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}-\dfrac{5\sqrt{2}}{4}=\dfrac{6\sqrt{2}-5\sqrt{2}}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

5. a) $2x^2 - 3 = 4 \Leftrightarrow 2x^2 = 7 \Leftrightarrow x^2 = \frac{7}{2} \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{7\cdot 2}{2\cdot 2}} = \pm\frac{\sqrt{14}}{2}$

b) $0{,}5x^2 + 2 = 3 \Leftrightarrow 0{,}5x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{2}$

c) $2\cdot(x^2 - 1) = 5 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 2{,}5 \Leftrightarrow x^2 = 3{,}5 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{7\cdot 2}{2\cdot 2}} = \pm\frac{\sqrt{14}}{2}$

d) $(x-3)\cdot(x+3) = 1 \Leftrightarrow x^2 - 9 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 10 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{10}$