

## Mathematik \* Jahrgangsstufe 9 \* Rechnen mit Wurzeln

**Merke:** Für  $a \in \mathbb{R}_0^+$  legt man fest:  $\sqrt{a}$  ist die positive Zahl, für die gilt  $(\sqrt{a})^2 = a$

Für Wurzeln gelten die beiden folgenden Regeln:

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b} \quad \text{und} \quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \quad \text{Zudem gilt:}$$

Die quadratische Gleichung  $x^2 = a$  hat für  $a > 0$  die beiden Lösungen  $x_1 = \sqrt{a}$  und  $x_2 = -\sqrt{a}$ .

Beachte: Es muss immer so weit wie möglich radiziert und der Nenner rational gemacht werden.

Also z.B.  $\sqrt{12a^3} = \sqrt{4 \cdot 3 \cdot a^2 \cdot a} = 2 \cdot a \cdot \sqrt{3a}$  und  $\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3}$

### Aufgaben:

1. Bestimme den Definitionsbereich des Terms!

a) $\sqrt{2x - 3}$	b) $\sqrt{0,4x + 2}$	c) $\sqrt{x^2 + 1}$
d) $\sqrt{4 - 0,2x}$	e) $\sqrt{4 - x^2}$	f) $\sqrt{x \cdot (2 - x)}$
g) $\sqrt{\frac{2}{x}}$	h) $\sqrt{\frac{3}{2+x}}$	k) $\frac{\sqrt{x+1}}{1+\sqrt{x}}$



2. Vereinfache durch Ausmultiplizieren und Zusammenfassen

a) $2\sqrt{6} \cdot (\sqrt{3} - 2\sqrt{2}) - \sqrt{10} \cdot (\sqrt{15} - \sqrt{30})$	b) $(1 + \sqrt{3})^2 - (1 - \sqrt{3})^2$
c) $(\sqrt{6} - 2\sqrt{2})^2 - \sqrt{2} \cdot (\sqrt{18} - \sqrt{150})$	d) $(2 - 3\sqrt{5})^2 - (1 + \sqrt{20})^2$
e) $\sqrt{8} \cdot (\sqrt{6} - 2\sqrt{5}) + \sqrt{5} \cdot (\sqrt{15} - \sqrt{2}) + \sqrt{2} \cdot (6\sqrt{5} - 5\sqrt{6})$	

3. Bestimme die Definitionsmenge und radiziere dann so weit wie möglich. Nenner rational machen!

a) $\sqrt{250a^3b^4}$	b) $\sqrt{80x^6y^8z^5}$	c) $\sqrt{27a^3b^{50}}$
d) $\frac{\sqrt{8x^2y}}{\sqrt{6xy^2}}$	e) $\frac{\sqrt{24a^2b^3}}{\sqrt{15ab}}$	f) $\frac{\sqrt{1000x^{20}y}}{\sqrt{75xy^4}}$

4. Vereinfache

a) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{15}}$	b) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{75}}$	c) $\sqrt{12,5}$	d) $\sqrt{12,1}$	e) $\sqrt{4\frac{1}{2}} - \sqrt{3\frac{1}{8}}$
f) $\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}$	g) $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$	h) $\frac{1-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$	i) $\frac{\sqrt{8}}{2-\sqrt{2}}$	k) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$
m) $\frac{\sqrt{8}-\sqrt{6}}{\sqrt{12}}$	n) $\frac{\sqrt{12}}{1+\sqrt{2}}$	p) $\frac{2+\sqrt{2}}{(1-\sqrt{2})^2}$	q) $\frac{1-\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})^2}$	r) $\frac{\sqrt{12}}{(1-\sqrt{3})^2}$

5. Bestimme alle Lösungen!

a) $2x^2 - 3 = 4$	b) $0,5x^2 + 2 = 3$	c) $2 \cdot (x^2 - 1) = 5$	d) $(x-3) \cdot (x+3) = 1$
-------------------	---------------------	----------------------------	----------------------------

**Mathematik \* Jahrgangsstufe 9 \* Rechnen mit Wurzeln \* Lösungen**

1. a)  $D = [1,5; \infty[$       b)  $D = [-5; \infty[$       c)  $D = \mathbb{R}$   
 d)  $D = ]-\infty; 20]$       e)  $D = [-2; 2]$       f)  $D = [0; 2]$   
 g)  $D = \mathbb{R}^+ = ]0; \infty[$       h)  $D = ]-2; \infty[$       k)  $D = \mathbb{R}^+ = ]0; \infty[$

2. a)  $2\sqrt{6} \cdot (\sqrt{3} - 2\sqrt{2}) - \sqrt{10} \cdot (\sqrt{15} - \sqrt{30}) = 6\sqrt{2} - 8\sqrt{3} - 5\sqrt{6} + 10\sqrt{3} = 6\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - 5\sqrt{6}$

b)  $(1 + \sqrt{3})^2 - (1 - \sqrt{3})^2 = 1 + 2\sqrt{3} + 3 - (1 - 2\sqrt{3} + 3) = 4\sqrt{3}$

c)  $(\sqrt{6} - 2\sqrt{2})^2 - \sqrt{2} \cdot (\sqrt{18} - \sqrt{150}) = 6 - 4\sqrt{12} + 8 - 6 + 10\sqrt{3} = 8 + 2\sqrt{3}$

d)  $(2 - 3\sqrt{5})^2 - (1 + \sqrt{20})^2 = 4 - 12\sqrt{5} + 45 - (1 + 4\sqrt{5} + 20) = 28 - 16\sqrt{5}$

e)  $\sqrt{8} \cdot (\sqrt{6} - 2\sqrt{5}) + \sqrt{5} \cdot (\sqrt{15} - \sqrt{2}) + \sqrt{2} \cdot (6\sqrt{5} - 5\sqrt{6}) = 4\sqrt{3} - 4\sqrt{10} + 5\sqrt{3} - \sqrt{10} + 6\sqrt{10} - 10\sqrt{3} = \sqrt{10} - \sqrt{3}$

3. a)  $\sqrt{250a^3b^4} = 5 \cdot a \cdot b^2 \cdot \sqrt{10a}$  mit  $a \in \mathbb{R}_0^+$  und  $b \in \mathbb{R}$

b)  $\sqrt{80x^6y^8z^5} = 4 \cdot |x^3| \cdot y^4 \cdot z^2 \cdot \sqrt{5z}$  mit  $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}_0^+$

c)  $\sqrt{27a^3b^{50}} = 3 \cdot a \cdot |b^{25}| \cdot \sqrt{3a}$  mit  $a \in \mathbb{R}_0^+, b \in \mathbb{R}$

d)  $\frac{\sqrt{8x^2y}}{\sqrt{6xy^2}} = \sqrt{\frac{4 \cdot x \cdot y \cdot 3}{3 \cdot y^2 \cdot 3}} = \frac{2 \cdot \sqrt{3xy}}{3y}$  mit  $x \in \mathbb{R}^+, y \in \mathbb{R}^+$

e)  $\frac{\sqrt{24a^2b^3}}{\sqrt{15ab}} = \sqrt{\frac{8 \cdot a \cdot b^2 \cdot 5}{5 \cdot 5}} = \frac{2b \cdot \sqrt{10a}}{5}$  mit  $b \in \mathbb{R}^+$  und  $a \in \mathbb{R}^+$

f)  $\frac{\sqrt{1000x^{20}y}}{\sqrt{75xy^4}} = \sqrt{\frac{100 \cdot 10 \cdot x^{19} \cdot y \cdot 3}{25 \cdot 3 \cdot y^4 \cdot 3}} = \frac{10 \cdot x^9 \cdot \sqrt{30xy}}{25 \cdot 3 \cdot y^2} = \frac{2x^9 \cdot \sqrt{30xy}}{15y^2}$  mit  $x \in \mathbb{R}^+, y \in \mathbb{R}^+$

4. a)  $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{15}} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 5}{5 \cdot 5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$  ( $= 0,4 \cdot \sqrt{5}$ )      b)  $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{75}} = \frac{2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{5 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{15}$

c)  $\sqrt{12,5} = \sqrt{\frac{25}{2}} = \sqrt{\frac{25 \cdot 2}{2 \cdot 2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$  ( $= 2,5 \cdot \sqrt{2}$ )

d)  $\sqrt{12,1} = \sqrt{\frac{121 \cdot 10}{10 \cdot 10}} = \frac{11\sqrt{10}}{10}$  ( $= 1,1 \cdot \sqrt{10}$ )

e)  $\sqrt{4\frac{1}{2}} - \sqrt{3\frac{1}{8}} = \sqrt{\frac{9 \cdot 2}{2 \cdot 2}} - \sqrt{\frac{25 \cdot 2}{8 \cdot 2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{5\sqrt{2}}{4} = \frac{6\sqrt{2} - 5\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

f)  $\frac{\sqrt{3}}{1 + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} \cdot (1 - \sqrt{2})}{(1 + \sqrt{2}) \cdot (1 - \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{6}}{1 - 2} = \sqrt{6} - \sqrt{3}$

g)  $\frac{1}{2 - \sqrt{3}} = \frac{1 \cdot (2 + \sqrt{3})}{(2 - \sqrt{3}) \cdot (2 + \sqrt{3})} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4 - 3} = 2 + \sqrt{3}$



$$h) \frac{1-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{(1-\sqrt{2}) \cdot (2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2}) \cdot (2-\sqrt{2})} = \frac{2-\sqrt{2}-2\sqrt{2}+2}{4-2} = \frac{4-3\sqrt{2}}{2} \quad (= 2 - 1,5\sqrt{2})$$

$$i) \frac{\sqrt{8}}{2-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{8} \cdot (2+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2}) \cdot (2+\sqrt{2})} = \frac{4\sqrt{2}+4}{4-2} = \frac{2 \cdot (2\sqrt{2}+2)}{2} = 2\sqrt{2}+2$$

$$k) \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} \cdot (\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2}) \cdot (\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3-2} = 3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$$

$$m) \frac{\sqrt{8}-\sqrt{6}}{\sqrt{12}} = \frac{(\sqrt{8}-\sqrt{6}) \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{12} \cdot \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{2 \cdot 3} = \frac{2\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{6}$$

$$n) \frac{\sqrt{12}}{1+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{12} \cdot (1-\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2}) \cdot (1-\sqrt{2})} = \frac{2\sqrt{3}-2\sqrt{6}}{1-2} = 2\sqrt{6}-2\sqrt{3}$$

$$p) \frac{2+\sqrt{2}}{(1-\sqrt{2})^2} = \frac{2+\sqrt{2}}{1-2\sqrt{2}+2} = \frac{(2+\sqrt{2}) \cdot (3+2\sqrt{2})}{(3-2\sqrt{2}) \cdot (3+2\sqrt{2})} = \frac{6+4\sqrt{2}+3\sqrt{2}+4}{9-4 \cdot 2} = 10+7\sqrt{2}$$

$$q) \frac{1-\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})^2} = \frac{1-\sqrt{2}}{1+2\sqrt{2}+2} = \frac{(1-\sqrt{2}) \cdot (3-2\sqrt{2})}{(3+2\sqrt{2}) \cdot (3-2\sqrt{2})} = \frac{3-2\sqrt{2}-3\sqrt{2}+4}{9-4 \cdot 2} = 7-5\sqrt{2}$$

$$r) \frac{\sqrt{12}}{(1-\sqrt{3})^2} = \frac{2\sqrt{3}}{1-2 \cdot \sqrt{3}+3} = \frac{2\sqrt{3}}{4-2\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3} \cdot (4+2\sqrt{3})}{(4-2\sqrt{3}) \cdot (4+2\sqrt{3})} = \frac{8\sqrt{3}+4 \cdot 3}{16-4 \cdot 3} =$$

$$\frac{4 \cdot (2\sqrt{3}+3)}{4} = 2\sqrt{3}+3$$

$$5. a) \quad 2x^2 - 3 = 4 \Leftrightarrow 2x^2 = 7 \Leftrightarrow x^2 = \frac{7}{2} \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm \sqrt{\frac{7 \cdot 2}{2 \cdot 2}} = \pm \frac{\sqrt{14}}{2}$$

$$b) \quad 0,5x^2 + 2 = 3 \Leftrightarrow 0,5x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm \sqrt{2}$$

$$c) \quad 2 \cdot (x^2 - 1) = 5 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 2,5 \Leftrightarrow x^2 = 3,5 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm \sqrt{\frac{7 \cdot 2}{2 \cdot 2}} = \pm \frac{\sqrt{14}}{2}$$

$$d) \quad (x-3) \cdot (x+3) = 1 \Leftrightarrow x^2 - 9 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 10 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm \sqrt{10}$$