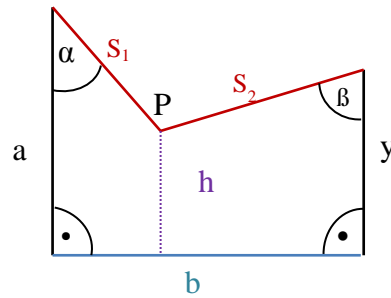


# Mathematik \* Jahrgangsstufe 9 \* Sinus, Kosinus und Tangens

1. Im Bild sind folgende Größen bekannt:  
 $a = 3,20\text{m}$ ,  $b = 4,00\text{m}$ ,  $\alpha = 40,0^\circ$ ,  
 $s_1 = 2,00\text{m}$ ,  $s_2 = 3,00\text{m}$ .

$h$  ist der Abstand des Punktes  $P$  von der Grundlinie  $b$ .

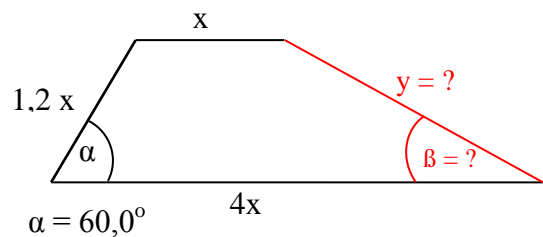
- Fertige möglichst genau eine Zeichnung im Maßstab  $1 : 50$  an.
- Bestimme mit geeigneter Rechnung die Längen  $h$  und  $y$  auf Zentimeter und den Winkel  $\beta$  auf  $0,1^\circ$  genau.



Die Zeichnung ist nicht maßstabsgetreu!

2. In abgebildeten Trapez gilt  $\alpha = 60^\circ$  bekannt:

- Fertige möglichst genau für  $x = 2,0\text{cm}$  eine maßstäbliche Zeichnung an.
- Bestimme mit geeigneter Rechnung  $\beta$  auf  $0,1^\circ$  genau und bestimme die Länge von  $y$  in Abhängigkeit von  $x$ .



Die Zeichnung ist nicht maßstabsgetreu!

3. Für bestimmte Winkel  $\beta$  lassen sich die Werte  $\sin(\beta)$ ,  $\cos(\beta)$  und  $\tan(\beta)$  exakt angeben. Betrachte dazu ein Quadrat (mit Diagonale) und ein gleichseitiges Dreieck (mit Höhe). Ergänze nun nach geeigneter Überlegung die folgende Tabelle!

Winkel $\beta$	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$
$\sin(\beta)$	0				1
$\cos(\beta)$	1				0
$\tan(\beta)$	0				-

4. Begründe folgende Gleichungen für  $0 < \alpha < 90^\circ$ .

- $\sin(90 - \alpha) = \cos(\alpha)$  und  $\cos(90 - \alpha) = \sin(\alpha)$
- $(\sin(\alpha))^2 + (\cos(\alpha))^2 = 1$  und  $\sin(\alpha) = \sqrt{1 - \cos(\alpha)^2}$
- $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$  und  $\cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\tan(\alpha))^2}}$



# Mathematik \* Jahrgangsstufe 9 \* Sinus, Kosinus und Tangens \* Lösungen

1. Im Bild sind folgende Größen bekannt:

$$a = 3,20\text{m}, b = 4,00\text{m}, \alpha = 40,0^\circ,$$

$$s_1 = 2,00\text{m}, s_2 = 3,00\text{m}.$$

b)

$$y_1 = s_1 \cdot \cos \alpha = 2,00\text{m} \cdot \cos 40,0^\circ = 1,53\text{m}$$

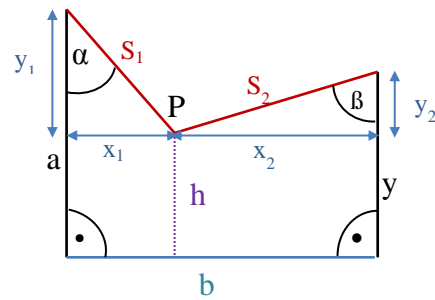
$$x_1 = s_1 \cdot \sin \alpha = 2,00\text{m} \cdot \sin 40,0^\circ = 1,29\text{m}$$

$$h = a - y_1 = 3,20\text{m} - 1,53\text{m} = 1,67\text{m}$$

$$x_2 = b - x_1 = 4,00\text{m} - 1,29\text{m} = 2,71\text{m};$$

$$y_2 = \sqrt{s_2^2 - x_2^2} = \sqrt{3,00^2 - 2,71^2} \text{ m} = 1,29\text{m}$$

$$y = h + y_2 = 1,67\text{m} + 1,29\text{m} = 2,96\text{m}; \quad y_2 = s_2 \cdot \cos \beta \Rightarrow \beta = \cos^{-1}\left(\frac{1,29}{3,00}\right) = 64,5^\circ$$



2. b)  $\alpha = 60,0^\circ$

$$a = 1,2x \cdot \cos \alpha = 1,2x \cdot \cos 60,0^\circ = 0,60x$$

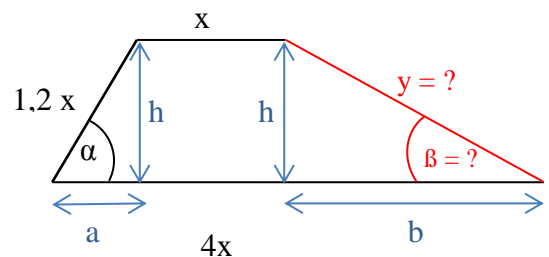
$$b = 4x - a - x = 3x - 0,60x = 2,4x$$

$$h = 1,2x \cdot \sin \alpha = 1,2x \cdot \sin 60,0^\circ = 0,6 \cdot \sqrt{3} x$$

$$y = \sqrt{h^2 + b^2} = \sqrt{(0,6 \cdot \sqrt{3})^2 + 2,4^2} \cdot x =$$

$$0,6 \cdot \sqrt{19} x \approx 2,62x$$

$$\tan \beta = \frac{h}{b} \Rightarrow \beta = \tan^{-1}\left(\frac{0,6 \cdot \sqrt{3} \cdot x}{2,4x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right) = 23,4^\circ$$



3.

im Quadrat gilt:  $d = \sqrt{2} \cdot a$

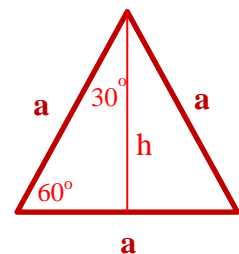
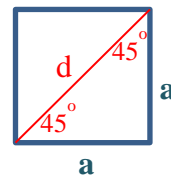
$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{a}{d} = \frac{a}{\sqrt{2} \cdot a} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{a}{a} = 1$$

im gleichseitigen Dreieck gilt:  $h = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot a$

$$\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{h}{a} = \frac{0,5 \cdot \sqrt{3} \cdot a}{a} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \quad \text{und} \quad \sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{0,5 \cdot a}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{0,5a}{h} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{und} \quad \tan 60^\circ = \frac{h}{0,5a} = \sqrt{3}$$



Winkel $\beta$	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$
$\sin(\beta)$	0	0,5	$0,5 \cdot \sqrt{2}$	$0,5 \cdot \sqrt{3}$	1
$\cos(\beta)$	1	$0,5 \cdot \sqrt{3}$	$0,5 \cdot \sqrt{2}$	0,5	0
$\tan(\beta)$	0	$\frac{1}{3} \cdot \sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	-



$$4. a) \sin(90 - \alpha) = \sin(\beta) = \frac{b}{c} = \cos(\alpha)$$

$$\cos(90 - \alpha) = \cos(\beta) = \frac{a}{c} = \sin(\alpha)$$

$$b) a^2 + b^2 = c^2 \Leftrightarrow \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1^2 \Leftrightarrow (\sin(\alpha))^2 + (\cos(\alpha))^2 = 1$$

$$\text{also auch } (\sin(\alpha))^2 = 1 - (\cos(\alpha))^2 \Rightarrow \sin(\alpha) = \sqrt{1 - \cos(\alpha)^2}$$

$$c) \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{a/c}{b/c} = \frac{a}{b} = \tan(\alpha) \text{ und damit}$$

$$1 + (\tan \alpha)^2 = 1 + \frac{(\sin \alpha)^2}{(\cos \alpha)^2} = \frac{(\cos \alpha)^2 + (\sin \alpha)^2}{(\cos \alpha)^2} = \frac{1}{(\cos \alpha)^2} \Rightarrow$$

$$(\cos \alpha)^2 = \frac{1}{1 + (\tan(\alpha))^2} \text{ und } \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + (\tan(\alpha))^2}}$$

