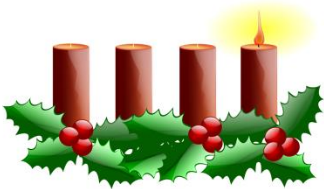
Q11 * Mathematik * Anwendungen der Ableitung

1. Bestimmen Sie alle Intervalle, in denen die Funktion f streng monoton steigt.

a) $f(x) = \frac{1}{30} \cdot (x^3 - 6x^2 - 15x + 20)$



b) $f(x) = \frac{1}{120} \cdot (6x^4 - 8x^3 - 45x^2 + 108x)$

c) $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$

2. Wo ist die Funktion f streng monoton fallend und wie hängt dies vom Parameter $k \in \mathbb{R}$ ab?

a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + k \cdot x$

b) $f(x) = k \cdot x^3 - 6x^2 - 3x$

3. Bestimmen Sie den Wert des Parameters k so, dass der Graph von f einen Terrassenpunkt besitzt.

a) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - kx^3 + 2x^2$

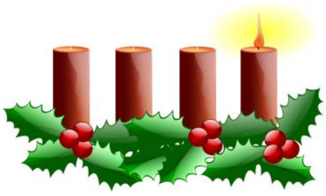
b) $f(x) = 0{,}5x^4 + kx^3 + 9x^2$

c) $f(x) = x^3 + 6x^2 + k \cdot x + 3$

Q11 * Mathematik * Anwendungen der Ableitung

1. Bestimmen Sie alle Intervalle, in denen die Funktion f streng monoton steigt.

a) $f(x) = \frac{1}{30} \cdot (x^3 - 6x^2 - 15x + 20)$



b) $f(x) = \frac{1}{120} \cdot (6x^4 - 8x^3 - 45x^2 + 108x)$

c) $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$

2. Wo ist die Funktion f streng monoton fallend und wie hängt dies vom Parameter $k \in \mathbb{R}$ ab?

a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + k \cdot x$

b) $f(x) = k \cdot x^3 - 6x^2 - 3x$

3. Bestimmen Sie den Wert des Parameters k so, dass der Graph von f einen Terrassenpunkt besitzt.

a) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - kx^3 + 2x^2$

b) $f(x) = 0{,}5x^4 + kx^3 + 9x^2$

c) $f(x) = x^3 + 6x^2 + k \cdot x + 3$

Q11 * Mathematik * Anwendungen der Ableitung * Lösung

1\. a) $f(x) = \frac{1}{30} \cdot (x^3 - 6x^2 - 15x + 20) \Rightarrow$

$f'(x) = \frac{1}{30} \cdot (3x^2 - 12x - 15) = \frac{1}{10}(x^2 - 4x - 5) = \frac{1}{10} \cdot (x-5) \cdot (x+1)$

d.h. $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in R \setminus]-1\,;5[$

Die Funktion f ist also in den beiden Intervallen $]-\infty; -1]$ und $[5\,; \infty[$ streng monoton steigend.

b) $f(x) = \frac{1}{120} \cdot (6x^4 - 8x^3 - 45x^2 + 108x) \Rightarrow$

$f'(x) = \frac{1}{120} \cdot (24x^3 - 24x^2 - 90x + 108) = \frac{1}{20} \cdot (4x^3 - 4x^2 - 15x + 18)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4x^2 - 15x + 18 = 0$ Durch Probieren Lösung $x_1 = -2$ gefunden!

$(4x^3 - 4x^2 - 15x + 18):(x+2) = 4x^2 - 12x + 9$ also $f'(x) = \frac{1}{20}(x+2) \cdot (4x^2 - 12x + 9)$

Weitere Faktorisierung mit Hilfe der Mitternachtsformel: $4x^2 - 12x + 9 = 4 \cdot (x - 1{,}5)^2$

$f'(x) = \frac{1}{5}(x+2) \cdot (x-1{,}5)^2$ also $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$

f ist streng monoton steigend im Intervall $[-2\,; \infty[$
(mit einem Terrassenpunkt (1,5 / 0,534375))

c) $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{(x^2+1) \cdot 1 - (x-1) \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2 + 2x + 1}{(x^2+1)^2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$x_{1/2} = \frac{1}{2} \cdot (2 \pm \sqrt{4+4}) = 1 \pm \sqrt{2}$ und $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in [\,1 - \sqrt{2}\,;\, 1 + \sqrt{2}\,]$

f ist also im Intervall $[\,1 - \sqrt{2}\,;\, 1 + \sqrt{2}\,]$ streng monoton steigend.

2\. a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + k \cdot x \Rightarrow f'(x) = x^2 - 4x + k \Rightarrow$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + k = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = \frac{1}{2} \cdot (4 \pm \sqrt{16 - 4k}) = 2 \pm 2 \cdot \sqrt{4 - k}$ falls $k \leq 4$

f ist streng monoton fallend im Intervall $[\,x_2\,; x_1\,]$, falls $k < 4$

b) $f(x) = k \cdot x^3 - 6x^2 - 3x \Rightarrow f'(x) = 3kx^2 - 12x - 3 = 3 \cdot (kx^2 - 4x - 1)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow kx^2 - 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = \frac{1}{2k} \cdot (4 \pm \sqrt{16 + 4k}) = \frac{1}{k} \cdot (2 \pm \sqrt{4+k})$

$x_{1/2} = \frac{1}{2k} \cdot (4 \pm \sqrt{16 + 4k}) = \frac{1}{k} \cdot (2 \pm \sqrt{4+k})$ falls $k > -4$ und $k \neq 0$

Für $k \leq -4$ ist f in R streng monoton fallend (für $k = -4$ ein Terrassenpunkt bei $x_{1/2} = -0{,}5$).
Für $-4 < k < 0$ gilt $f'(x) \leq 0$ in den Intervallen $]-\infty; x_1]$ und $[x_2\,; \infty[$ und f ist damit in diesen beiden Intervallen streng monoton fallend.
Für $k > 0$ gilt $f'(x) \leq 0$ im Intervall $[x_2\,; x_1]$ und daher ist f damit streng monoton fallend im Intervall $[x_2\,; x_1]$. Für $k = 0$ ist f streng monoton fallend im Intervall $[-0{,}25\,; \infty[$.

3. Für einen Terrassenpunkt benötigt man hier jeweils eine doppelte Nullstelle der Ableitung! Für eine quadratische Gleichung bedeutet dies, dass die zugehörige Diskriminante $D = b^2 - 4ac$ den Wert 0 haben muss, denn dann stimmen die beiden Lösungen x_1 und x_2 überein.

a) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - kx^3 + 2x^2 \Rightarrow f'(x) = x^3 - 3kx^2 + 4x = x \cdot (x^2 - 3kx + 4)$

Für $x^2 - 3kx + 4 = 0$ muss $D = 9k^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0$ gelten! D.h. $k_{1/2} = \pm \frac{4}{3}$.

Für $k_1 = \frac{4}{3}$ gilt $f'(x) = x \cdot (x^2 - 4x + 4) = x \cdot (x-2)^2$ und $(2/\frac{4}{3})$ ist Terrassenpunkt.

für $k_1 = -\frac{4}{3}$ gilt $f'(x) = x \cdot (x^2 + 4x + 4) = x \cdot (x+2)^2$ und $(-2 / \frac{4}{3})$ ist Terrassenpunkt..

b) $f(x) = 0{,}5x^4 + kx^3 + 9x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x^3 + 3kx^2 + 18x = x \cdot (2x^2 + 3kx + 18)$

Für $2x^2 + 3kx + 18 = 0$ muss $D = 9k^2 - 4 \cdot 2 \cdot 18 = 0$ gelten! D.h. $k_{1/2} = \pm 4$.

Für $k_1 = 4$ gilt $f'(x) = x \cdot (2x^2 + 12x + 18) = 2x \cdot (x^2 + 6x + 9) = 2x \cdot (x+3)^2$ und $(-3/13{,}5)$ ist damit ein Terrassenpunkt.

Für $k_2 = -4$ gilt $f'(x) = x \cdot (2x^2 - 12x + 18) = 2x \cdot (x^2 - 6x + 9) = 2x \cdot (x-3)^2$ und $(3/13{,}5)$ ist damit ein Terrassenpunkt.

c) $f(x) = x^3 + 6x^2 + k \cdot x + 3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 12x + k$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 12x + k = 0$ und es muss gelten: $D = 12^2 - 4 \cdot 3 \cdot k = 0$,

d.h. $k = 12$ und $f'(x) = 3x^2 + 12x + 12 = 3 \cdot (x^2 + 4x + 4) = 3 \cdot (x+2)^2$

Für $k = 12$ liegt damit bei $(-2/-5)$ ein Terrassenpunkt vor.