

## Q11 \* Mathematik \* Ableitungsregeln

**Produktregel**  $(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

**Quotientenregel**  $\left(\frac{z(x)}{n(x)}\right)' = \frac{n(x) \cdot z'(x) - z(x) \cdot n'(x)}{n(x)^2}$

**Kettenregel**  $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$



### Beispiele:

$$((x^2+1) \cdot (2+\sqrt{x}))' = 2x \cdot (2+\sqrt{x}) + (x^2+1) \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$$

$$\left(\frac{3x}{x^2+1}\right)' = \frac{3 \cdot (x^2+1) - 2x \cdot 3x}{(x^2+1)^2} = \frac{3x^2+3-6x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{3-3x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$((x^2+3x+1)^3)' = 3 \cdot (x^2+3x+1)^2 \cdot (2x+3)$$



### Aufgaben

Berechnen Sie jeweils die Ableitung  $f'(x)$  !

Bestimmen Sie anschließend alle Stellen der Funktion mit  $f'(x) = 0$ .

1.  $f(x) = (2x^3 - 6)^2$

2.  $f(x) = (3x^2 - 12) \cdot (x^3 + x)$

3.  $f(x) = \frac{2x-1}{x^2+1}$

4.  $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

5.  $f(x) = \sqrt{0,5x^2+2}$

6.  $f(x) = 2 \cdot \sqrt{x+1} \cdot (x^2-1)$  ;  $x \in [-1; \infty[$

7.  $f(x) = \frac{2+3x}{4+5x^2}$

8.  $f(x) = \frac{2x-5x^2}{2x-4}$  ;  $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$

9.  $f(x) = \frac{3x+6}{\sqrt{x}}$  ;  $x \in \mathbb{R}^+$

10.  $f(x) = \frac{5x-x^2}{x^2+1}$

11.  $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12$

12.  $f(x) = \sqrt{0,5x^4+x^2}$

13.  $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}$

14.  $f(x) = \frac{4-x^2}{\sqrt{x+1}}$  ;  $x \in ]-1; \infty[$

15.  $f(x) = (x+1) \cdot \sqrt{x^2+1}$

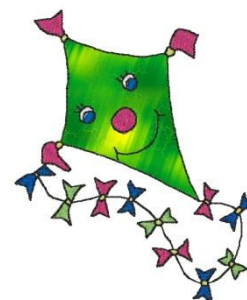
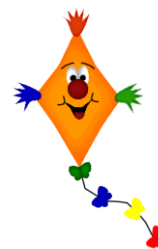
16.  $f(x) = \sqrt{0,5x^4+4x^2+1}$

17.  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+4}}{x^2+1}$

18.  $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x-1}$  ;  $x \in ]1; \infty[$

19.  $f(x) = \frac{5x}{x^2-1}$  ;  $x \in \mathbb{R} \setminus \{1; -1\}$

20.  $f(x) = \frac{x^2-1}{5x}$  ;  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$



## Q11 \* Mathematik \* Ableitungsregeln \* Lösungen

$$1. f(x) = (2x^3 - 6)^2 \Rightarrow f'(x) = 12x^2 \cdot (2x^3 - 6) ; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = 0 ; x_3 = \sqrt[3]{3}$$

$$2. f(x) = (3x^2 - 12) \cdot (x^3 + x) \Rightarrow f'(x) = 15x^4 - 27x^2 - 12 ;$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm \sqrt{\frac{9 + \sqrt{161}}{10}} \approx \pm 1,47$$

$$3. f(x) = \frac{2x-1}{x^2+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{-2x^2 + 2x + 2}{(x^2+1)^2} ;$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,62 ; x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \approx -0,62$$



$$4. f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{4x}{(x^2+1)^2} ; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$$

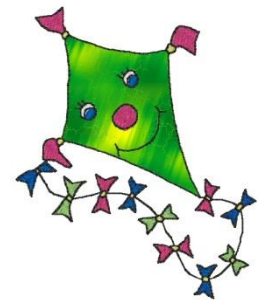
$$5. f(x) = \sqrt{0,5x^2 + 2} \Rightarrow f'(x) = \frac{x}{2 \cdot \sqrt{0,5x^2 + 2}} ; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$$

$$6. f(x) = 2 \cdot \sqrt{x+1} \cdot (x^2 - 1) ; x \in [-1; \infty[ \Rightarrow f'(x) = \frac{5x^2 + 4x - 1}{\sqrt{x+1}} ;$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0,2 ; (x_2 = -1 ; \lim_{x \rightarrow -1} f'(x) = 0)$$

$$7. f(x) = \frac{2+3x}{4+5x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{12-20x-15x^2}{(4+5x^2)^2} ;$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{-10 + 2\sqrt{70}}{15} \approx 0,45 ; x_2 = \frac{-10 - 2\sqrt{70}}{15} \approx -1,79$$



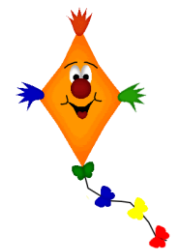
$$8. f(x) = \frac{2x-5x^2}{2x-4} ; x \in \mathbb{R} \setminus \{2\} \Rightarrow f'(x) = \frac{-5x^2 + 20x - 4}{2 \cdot (x-2)^2} ;$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{10 + 4\sqrt{5}}{5} \approx 3,79 ; x_2 = \frac{10 - 4\sqrt{5}}{5} \approx 0,21$$

$$9. f(x) = \frac{3x+6}{\sqrt{x}} ; x \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow f'(x) = \frac{3x-6}{2x \cdot \sqrt{x}} ; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2$$

$$10. f(x) = \frac{5x-x^2}{x^2+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{-5x^2-2x+5}{(x^2+1)^2} ;$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{-1 + \sqrt{26}}{5} \approx 0,82 ; x_2 = \frac{-1 - \sqrt{26}}{5} \approx -1,22$$



$$11. f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12 \Rightarrow f'(x) = 12x^3 - 12x^2 ; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = 0 ; x_3 = 1$$

$$12. f(x) = \sqrt{0,5x^4 + x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{x^3 + x}{\sqrt{0,5x^4 + x^2}} = \frac{x \cdot (x^2 + 1)}{|x| \cdot \sqrt{0,5x^2 + 1}}$$

$f'(x)=0$  hat keine Lösung, denn  $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \pm 1$

$$13. f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{x^3 + 2x}{(1+x^2) \cdot \sqrt{1+x^2}} ; f'(x)=0 \Leftrightarrow x_1 = 0$$

$$14. f(x) = \frac{4-x^2}{\sqrt{x+1}} ; x \in ]-1; \infty[ \Rightarrow f'(x) = \frac{-3x^2 - 4x - 4}{2(x+1) \cdot \sqrt{x+1}} ; f'(x)=0 \text{ hat keine Lösung!}$$

$$15. f(x) = (x+1) \cdot \sqrt{x^2+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x^2+x+1}{\sqrt{x^2+1}} ; f'(x)=0 \text{ hat keine Lösung!}$$

$$16. f(x) = \sqrt{0,5x^4 + 4x^2 + 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{x^3 + 4x}{\sqrt{0,5x^4 + 4x^2 + 1}} ; f'(x)=0 \Leftrightarrow x_1 = 0$$

$$17. f(x) = \frac{\sqrt{x^2+4}}{x^2+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{-x^3 - 7x}{\sqrt{x^2+4} \cdot (x^2+1)^2} ; f'(x)=0 \Leftrightarrow x_1 = 0$$

$$18. f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x-1} ; x \in ]1; \infty[ \Rightarrow f'(x) = \frac{-x-3}{2(x-1)^2 \cdot \sqrt{x+1}} ; f'(x)=0 \text{ hat keine Lösung!}$$

$$19. f(x) = \frac{5x}{x^2-1} ; x \in \mathbb{R} \setminus \{1; -1\} \Rightarrow f'(x) = \frac{-5(x^2+1)}{(x^2-1)^2} ; f'(x)=0 \text{ hat keine Lösung!}$$

$$20. f(x) = \frac{x^2-1}{5x} ; \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow f'(x) = \frac{x^2+1}{5x} ; f'(x)=0 \text{ hat keine Lösung!}$$