

Q11 * Mathematik * Geo-Aufgabe mit Ebene

1. Gegeben sind die Punkte $A(5/1/-3)$, $B(1/5/5)$, $C(3/-1/9)$ und $P(7/3/6)$.
- Zeigen Sie, dass die Punkte A, B und C eine Ebene E festlegen.
 - Zeigen Sie, dass der Punkt P nicht in dieser Ebene E liegt.
 - Bestimmen Sie den Abstand $d(P;E)$ des Punktes P von der Ebene E.
 - Bestimmen Sie die Schnittfigur der Kugel $k(P; r = 5)$ mit der Ebene E.

$$A(5/1/-3) \quad B(1/5/5) \quad C(3/-1/9) \quad P(7/3/6)$$

a, $\vec{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$ $\vec{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 12 \end{pmatrix}$ $\vec{AB} \neq r \cdot \vec{AC}$ für alle $r \in \mathbb{R} \Rightarrow$

A, B und C legen eine Ebene E fest

b, zeige: $P \notin E$ $\vec{AP} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}$ Ansatz $\vec{AP} = r \cdot \vec{AB} + s \cdot \vec{AC} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad 2 &= -4r - 2s \\ \textcircled{2} \quad 2 &= 4r - 2s \\ \textcircled{3} \quad 9 &= 8r + 12s \end{aligned} \quad \begin{aligned} \textcircled{2} - \textcircled{1} &\Rightarrow 8r = 0 \Rightarrow r = 0; s = -1 \text{ in } \textcircled{1} \\ \textcircled{3} \text{ rechte Seite } &8r + 12s = 0 - 12 = -12 \neq 9 \quad \checkmark \\ &\text{also } P \notin E \end{aligned}$$

c, gemeint: Abstand des Punktes P von der Ebene E

Finde zunächst \vec{n} mit $\vec{n} \perp \vec{AB}$ und $\vec{n} \perp \vec{AC} \Leftrightarrow$

$$\vec{n} \cdot \vec{AB} = 0 \text{ und } \vec{n} \cdot \vec{AC} = 0 \Leftrightarrow \textcircled{1} -4n_1 + 4n_2 + 8n_3 = 0 \text{ und } \textcircled{2} -2n_1 - 2n_2 + 12n_3 = 0$$

setze $2n_1 = 12n_3 - 2n_2$ in $\textcircled{1}$ ein $-2(6n_3 - n_2) + 4n_2 + 8n_3 = 0 \Rightarrow$

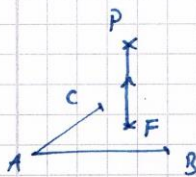
$$-12n_3 + 2n_2 + 4n_2 + 8n_3 = 0 \quad \text{Wähle z.B. } n_3 = 1 \Rightarrow n_2 = +2 \text{ in } \textcircled{1}$$

$$4n_1 = 4n_2 + 8n_3 \Rightarrow n_1 = n_2 + 2n_3 = 4 \quad \text{also } \vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

F ist der Fußpunkt des Lots von P auf Ebene E

Es gilt: $\vec{AF} = r \cdot \vec{AB} + s \cdot \vec{AC}$ und

$$\vec{AF} = \vec{AP} + t \cdot \vec{n} \quad \text{also}$$



$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad -4r - 2s &= 2 + 4t \\ \textcircled{2} \quad 4r - 2s &= 2 + 2t \Rightarrow 2s = 4r - 2 - 2t \text{ in } \textcircled{1} \text{ und } \textcircled{3} \\ \textcircled{3} \quad 8r + 12s &= 9 + t \end{aligned}$$

$$\textcircled{1} \quad -4r - 4r + 2 + 2t = 2 + 4t \Leftrightarrow -8r = 2t \Leftrightarrow t = -4r \text{ in } \textcircled{3}$$

$$\textcircled{3} \quad 8r + 24r - 12 - 12t = 9 + t \Leftrightarrow 32r = 13t + 21$$

$$\textcircled{3} \quad 32r = -52r + 21 \Rightarrow 84r = 21 \Rightarrow r = \frac{1}{4}; \quad t = -4r = -1$$

$$\text{und } 2s = 4r - 2 - 2t = 1 - 2 + 2 \Rightarrow s = \frac{1}{2}$$

$$\vec{AF} = r \cdot \vec{AB} + s \cdot \vec{AC} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{F} = \vec{AF} + \vec{A} = \begin{pmatrix} -2+5 \\ 0+1 \\ 8-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$d(P;E) = |\vec{PF}| = \sqrt{4^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{21} = d$$

d, $r = 5 > d = \sqrt{21}$ also schneidet die Kugel $k(P; r)$ die Ebene

E in einem Kreis mit Mittelpunkt $M = F$

und Radius $\rho = 2$

$$\begin{aligned} r^2 &= d^2 + \rho^2 \\ \rho &= \sqrt{25 - 21} = 2 \end{aligned}$$