

## Q11 \* Mathematik \* Wichtige Lerninhalte für die 1. Klausur

- Gebrochen rationale Funktionen, insbesondere
  - Verhalten an den Definitionslücken und im Unendlichen
  - Asymptoten, auch schräg liegende
  - Polynomdivision
- Der Differentialquotient und seine geometrische Bedeutung
- Berechnung des Differentialquotienten
- Anwendungen des Differentialquotienten wie z.B.
  - Tangenten- und Normalengleichung
  - Schnittwinkel von Graphen
- Die Ableitungsfunktion (auch ihre graphische Ermittlung)
- Summen-, Produkt- und Kettenregel
- Anwendung der Ableitung, insbesondere
  - Ermitteln von Hoch-, Tief- und Terrassenpunkten
  - Einfache „Kurvendiskussion“ bei gebrochen rationalen Funktionen



### Typische Aufgaben

1. Bestimme alle Asymptoten (senkrechte, waagrechte bzw. schräg liegende) der Funktion

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{3x - x^2}$$

2. Berechnen Sie die Steigung des Graphen von  $f$  an der Stelle  $x_1 = 2$  bzw. an einer beliebigen Stelle  $x_0$  mit Hilfe des Differentialquotienten für  $f(x) = 2 \cdot x^2 - 3$ .

3. Unter welchem Winkel schneidet der Graph der Funktion  $f$  die  $x$ - bzw.  $y$ -Achse?

a)  $f(x) = -0,5x^2 + 2x - 2$       b)  $f(x) = \frac{x^2 - 9}{3x + 1}$

4. Bestimmen Sie alle Hoch-, Tief- bzw. Terrassenpunkte des Graphen von  $f$ .

$$f(x) = \frac{1}{12} \cdot (3x^4 + 4x^3 - 12x^2)$$

5. Führen Sie für die gebrochen rationale Funktion  $f$  mit  $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{2x + 2}$  eine

„Kurvendiskussion“ durch, d.h.

bestimmen Sie den Definitionsbereich  $D_f$ , alle Nullstellen, das Verhalten an den Grenzen des Definitionsbereichs, schräg liegende Asymptoten, die Ableitung und alle Hoch- und Tiefpunkte des Graphen.

Skizzieren Sie anschließend den Graphen!

**Q11 \* Mathematik \* Lerninhalte 1. Klausur \* Lösungen zu den typischen Aufgaben**

1.  $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{3x - x^2} = \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{x \cdot (3 - x)}$ ;  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0; 3\}$  also senkrechte Asymptoten  $x=0$  und  $x=3$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{x \cdot (3 - x)} = \frac{1}{\pm 0 \cdot 3} = \pm \infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{x \cdot (3 - x)} = \frac{10}{3 \cdot \mp 0} = \mp \infty$

$(x^3 - 2x^2 + 1) : (-x^2 + 3x) = -x - 1 + \frac{3x + 1}{-x^2 + 3x} \Rightarrow y = -x - 1$  ist Asymptote für  $x \rightarrow \pm \infty$

2.  $f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2 \cdot x^2 - 3) - (2 \cdot 2^2 - 3)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 \cdot x^2 - 8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 \cdot (x - 2) \cdot (x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} 2 \cdot (2 + x) = 2 \cdot (2 + 2) = 8$

$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2 \cdot x^2 - 3 - (2 \cdot x_0^2 - 3)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2 \cdot x^2 - 2x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2 \cdot (x - x_0) \cdot (x + x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} 2 \cdot (x + x_0) = 2 \cdot (x_0 + x_0) = 4x_0$

3. a)  $f(x) = -0,5x^2 + 2x - 2 \Rightarrow f'(x) = -x + 2$

Nullstellen:  $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = 2$  doppelte Nullstelle

$f'(2) = -2 + 2 = 0$  der Graph von  $f$  berührt die  $x$ -Achse bei  $x_{1/2} = 2$  („Schnittwinkel“  $0^\circ$ )

$f'(0) = 2 \Rightarrow$  Steigungswinkel  $\alpha = \tan^{-1}(2) \approx 63,4^\circ$

Schnittwinkel mit  $y$ -Achse also  $90^\circ - 63,4^\circ = 26,6^\circ$

b)  $f(x) = \frac{x^2 - 9}{3x + 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{(3x + 1) \cdot 2x - (x^2 - 9) \cdot 3}{(3x + 1)^2} = \frac{3x^2 + 2x + 27}{(3x + 1)^2}$

Nullstellen:  $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 3$  und  $f'(3) = \frac{27 + 6 + 27}{100} = 0,6$

und  $f'(-3) = \frac{27 - 6 + 27}{64} = 0,75$  und  $f'(0) = \frac{0 + 0 + 27}{1} = 27$

Steigungswinkel und damit Schnittwinkel bei  $x_1 = 3$ :  $\alpha = \tan^{-1}(0,6) \approx 31,0^\circ$

Steigungswinkel und damit Schnittwinkel bei  $x_2 = -3$ :  $\alpha = \tan^{-1}(0,75) \approx 36,9^\circ$

Steigungswinkel bei  $x_3 = 0$ :  $\alpha = \tan^{-1}(27) \approx 87,9^\circ$  also Schnittwinkel mit  $y$ -Achse  $2,1^\circ$

4.  $f(x) = \frac{1}{12} \cdot (3x^4 + 4x^3 - 12x^2) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{12} \cdot (12x^3 + 12x^2 - 24x) = x \cdot (x^2 + x - 2)$

Horizontale Tangenten:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \cdot (x^2 + x - 2) = 0 \Leftrightarrow x \cdot (x - 1) \cdot (x + 2) = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0$ ;  $x_1 = 1$ ;  $x_2 = -2$

$y_0 = f(0) = 0$ ;  $y_1 = f(1) = \frac{1}{12} \cdot (3 + 4 - 12) = -\frac{5}{12}$ ;  $y_2 = f(-2) = \frac{48 - 32 - 48}{12} = -\frac{8}{3}$

x	$x < -2$	$x = -2$	$-2 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 1$	$x = 1$	$1 < x$
$f'(x) = x \cdot (x - 1) \cdot (x + 2)$	$< 0$	$= 0$	$> 0$	$= 0$	$< 0$	$= 0$	$> 0$

Tiefpunkt  $(-2 / -\frac{8}{3})$ ; Hochpunkt  $(0 / 0)$ ; Tiefpunkt  $(1 / -\frac{5}{12})$ ; kein Terrassenpunkt

$$5. f(x) = \frac{x^2 - 3x}{2x + 2} = \frac{x \cdot (x-3)}{2 \cdot (x+1)} \quad ; \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\} \quad ; \quad \text{Nullstellen } x_1 = 0 \quad ; \quad x_2 = 3 \quad ; \quad y_1 = y_2 = 0$$

Senkrechte Asymptote bei  $x_3 = -1$  mit  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \frac{x \cdot (x-3)}{2 \cdot (x+1)} = \frac{+4}{2 \cdot (\pm 0)} = \pm \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x \cdot (x-3)}{2 \cdot (x+1)} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{(x-3)}{2 \cdot (1 + \frac{1}{x})} = \frac{\pm \infty}{2} = \pm \infty$$

Schräg liegende Asymptote  $y = \frac{1}{2}x - 2$  für  $x \rightarrow \pm \infty$ , denn

$$(x^2 - 3x) : (2x + 2) = \frac{1}{2}x - 2 + \frac{4}{2x + 2}$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x}{2x + 2} \Rightarrow f'(x) = \frac{(2x + 2) \cdot (2x - 3) - 2 \cdot (x^2 - 3x)}{(2x + 2)^2} =$$

$$= \frac{4x^2 - 2x - 6 - 2x^2 + 6x}{(2x + 2)^2} = \frac{2x^2 + 4x - 6}{(2x + 2)^2} = \frac{2 \cdot (x^2 + 2x - 3)}{4 \cdot (x + 1)^2} = \frac{(x - 1) \cdot (x + 3)}{2 \cdot (x + 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x - 1) \cdot (x + 3) = 0 \Leftrightarrow x_4 = 1 \quad ; \quad x_5 = -3 \quad \text{und} \quad y_4 = -\frac{1}{2} \quad ; \quad y_5 = -\frac{9}{2}$$

x	$x < -3$	$x = -3$	$-3 < x < 1$	$x = 1$	$1 < x$
$f'(x) = \frac{(x-1) \cdot (x+3)}{2 \cdot (x+1)^2}$	$> 0$	$= 0$	$< 0$	$= 0$	$> 0$

Hochpunkt  $(-3 / -4,5)$  ; Tiefpunkt  $(1 / -0,5)$

