Q11 * Mathematik *
Verhalten gebrochen rationaler Funktionen an den Grenzen des Definitionsbereichs

Eine gebrochen rationale Funktion f hat die folgende Form:

$$f(x) = \frac{z(x)}{n(x)} = \frac{a_m \cdot x^m + a_{m-1} \cdot x^{m-1} + ... + a_1 \cdot x^1 + a_o}{b_n \cdot x^n + b_{n-1} \cdot x^{n-1} + ... + b_1 \cdot x^1 + b_o} \quad (\text{mit } a_i, b_i \in Q \text{ und } m, n \in N)$$

Man nennt m den Grad des Zählers und n den Grad des Nenners.

1. Definitionslücken

Die Nullstellen des Nenners sind Definitionslücken von f.

Ist x_1 eine Nullstelle des Nenners aber keine Nullstelle des Zählers, so nennt man x_1 eine Polstelle von f und der Graph von f hat bei x_1 eine senkrechte Asymptote.
Ist x_1 eine einfache, dreifache, … Nullstelle, so liegt eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel vor, ist x_1 eine doppelte, vierfache, … Nullstelle, so liegt eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel vor.

Ist x_1 eine Nullstelle des Nenners und des Zählers mit gleicher Vielfachheit, so heißt die Definitionslücke stetig hebbar. (Im Graph ist dann ein Punkt herausgestanzt.)

2. Verhalten im Unendlichen ($x \to \pm\infty$)

Das Verhalten im Unendlichen hängt vom Grad des Zählers und des Nenners ab.

Gilt $m < n$, so folgt $\quad \lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$

Gilt $m = n$, so folgt $\quad \lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{a_m \cdot x^m + a_{m-1} \cdot x^{m-1} + ... + a_1 \cdot x^1 + a_o}{b_m \cdot x^m + b_{m-1} \cdot x^{m-1} + ... + b_1 \cdot x^1 + b_o} = \frac{a_m}{b_m}$

Gilt $m > n$, so folgt $\quad \left| \lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) \right| = \left| \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{a_m \cdot x^m + ...}{b_n \cdot x^n + ...} \right| = \infty$

(Das Vorzeichen von $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$ hängt von m, n, a_m und b_n ab.)

Gilt $m = n + 1$, so besitzt der Graph von f eine „schräg“ liegende Gerade als Asymptote.
Die Gleichung dieser Asymptote erhält man durch Polynomdivision.

Beispiel:

$$f(x) = \frac{3x^3 - 2x + 1}{2x^2 + x} = (3x^3 - 2x + 1) : (2x^2 + x) = 1{,}5x - 0{,}75 + \frac{-1{,}25x + 1}{2x^2 + x}$$

$$\begin{array}{l} -(2x^3 + 1{,}5x^2) \\ \quad -1{,}5x^2 - 2x + 1 \\ \quad -(-1{,}5x^2 - 0{,}75x) \\ \qquad\quad -1{,}25x + 1 \end{array}$$

Wegen $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{-1{,}25x + 1}{2x^2 + x} = 0$ lautet die Gleichung der Asymptote $y = 1{,}5x - 0{,}75$,
der Graph von f schmiegt sich also dieser Geraden für $x \to \pm\infty$ beliebig nahe an.