

Q11 * Mathematik m1 * 1. Stegreifaufgabe am 20.12.2016 * Gruppe A

1. Die Funktion f mit $f(x) = \frac{2x+2}{\sqrt{2x^2+1}}$ soll untersucht werden.

- Bestimmen Sie den Definitionsbereich und alle Schnittstellen des Graphen mit den Koordinatenachsen und bestimmen Sie $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$.
- Bestimmen Sie alle Hoch-, Tief- bzw. Terrassenpunkte des Graphen von f .
- Skizzieren Sie den Graphen!

2. Die Funktion f_k mit $f_k(x) = 0,5x^3 - kx^2 + 6x$ mit $k \in \mathbb{R}$ soll in Abhängigkeit von k untersucht werden.

- Für welche Werte von k besitzt der Graph von f_k einen Hoch- und einen Tiefpunkt.
- Der Graph von f_k soll für ein $k > 0$ einen Terrassenpunkt besitzen. Bestimmen Sie einen passenden positiven Wert für k und berechnen Sie dann die Koordinaten dieses Terrassenpunktes.

Aufgabe	1a	b	c	2a	b	Σ
Punkte	6	8	4	4	5	27



Gutes Gelingen! G.R.

Q11 * Mathematik m1 * 1. Stegreifaufgabe am 20.12.2016 * Gruppe B

1. Die Funktion f mit $f(x) = \frac{2x+4}{\sqrt{2x^2+1}}$ soll untersucht werden.

- Bestimmen Sie den Definitionsbereich und alle Schnittstellen des Graphen mit den Koordinatenachsen und bestimmen Sie $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$.
- Bestimmen Sie alle Hoch-, Tief- bzw. Terrassenpunkte des Graphen von f .
- Skizzieren Sie den Graphen!

2. Die Funktion f_k mit $f_k(x) = 0,5x^3 + kx^2 + 6x$ mit $k \in \mathbb{R}$ soll in Abhängigkeit von k untersucht werden.

- Für welche Werte von k besitzt der Graph von f_k einen Hoch- und einen Tiefpunkt.
- Der Graph von f_k soll für ein $k > 0$ einen Terrassenpunkt besitzen. Bestimmen Sie einen passenden positiven Wert für k und berechnen Sie dann die Koordinaten dieses Terrassenpunktes.

Aufgabe	1a	b	c	2a	b	Σ
Punkte	6	8	4	4	5	27



Gutes Gelingen! G.R.

Q11 * Mathematik m1 * 1. Stegreifaufgabe am 20.12.2016 * Gruppe A * Lösung

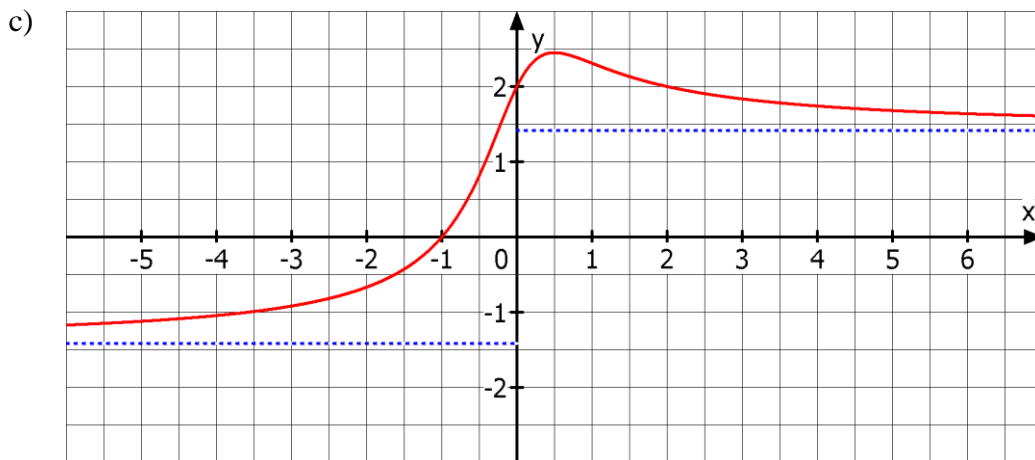
1. a) $f(x) = \frac{2x+2}{\sqrt{2x^2+1}}$; $D_f = \mathbb{R}$; $f(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1$; $f(0) = \frac{2}{\sqrt{1}} = 2$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x+2}{\sqrt{2x^2+1}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{\sqrt{2x^2}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{\sqrt{2} \cdot |x|} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{2} \cdot x}{\pm x} = \pm \sqrt{2} \approx \pm 1,41$$

$$\begin{aligned} \text{b) } f'(x) &= \frac{2 \cdot \sqrt{2x^2+1} - (2x+2) \cdot \frac{4x}{2 \cdot \sqrt{2x^2+1}}}{2x^2+1} = \frac{2 \cdot (2x^2+1) - (2x+2) \cdot 2x}{(2x^2+1) \cdot \sqrt{2x^2+1}} = \\ &= \frac{4x^2+2-4x^2-4x}{(2x^2+1) \cdot \sqrt{2x^2+1}} = \frac{2-4x}{(2x^2+1) \cdot \sqrt{2x^2+1}} = \frac{2 \cdot (1-2x)}{(2x^2+1) \cdot \sqrt{2x^2+1}} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1-2x = 0 \Leftrightarrow x_2 = 0,5; \quad y_2 = f(0,5) = \frac{2 \cdot 0,5 + 2}{\sqrt{2 \cdot 0,25 + 1}} = \frac{3}{\sqrt{1,5}} = \sqrt{6} \approx 2,45$$

x	$x < 0,5$	$x = 0,5$	$0,5 < x$
$f'(x) = \frac{2 \cdot (1-2x)}{(2x^2+1) \cdot \sqrt{2x^2+1}}$	> 0	0	< 0
G_f	streng monoton steigend	HOP(0,5 / f(0,5)) = (0,5 / $\sqrt{6}$)	streng monoton fallend



2. a) $f_k(x) = 0,5x^3 - kx^2 + 6x \Rightarrow f_k'(x) = 1,5x^2 - 2kx + 6$

$$f_k'(x) = 0 \Leftrightarrow 1,5x^2 - 2kx + 6 = 0 \text{ muss zwei einfache Nullstellen besitzen, d.h.}$$

$$D = (-2k)^2 - 4 \cdot 1,5 \cdot 6 > 0 \Leftrightarrow 4k^2 > 4 \cdot 1,5 \cdot 6 \Leftrightarrow k^2 > 9 \Leftrightarrow |k| > 3 \text{ also } k \in \mathbb{R} \setminus [-3; 3]$$

b) $f_k'(x) = 0 \Leftrightarrow 1,5x^2 - 2kx + 6 = 0$ muss eine doppelte Nullstellen besitzen, d.h.

$$D = (-2k)^2 - 4 \cdot 1,5 \cdot 6 = 0 \Leftrightarrow 4k^2 = 4 \cdot 9 \Leftrightarrow k^2 = 9 \stackrel{k>0}{\Leftrightarrow} k = +3$$

$$f_3'(x) = 1,5x^2 - 2 \cdot 3x + 6 = 1,5 \cdot (x^2 - 4x + 4) = 1,5 \cdot (x-2)^2 \text{ also}$$

$$\text{TP}(2/f_3(2)) \text{ und } f_3(2) = 0,5 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 = 4$$

also Terrassenpunkt TP(2 / 4) für $k=3$.

Q11 * Mathematik m1 * 1. Stegreifaufgabe am 20.12.2016 * Gruppe B * Lösung

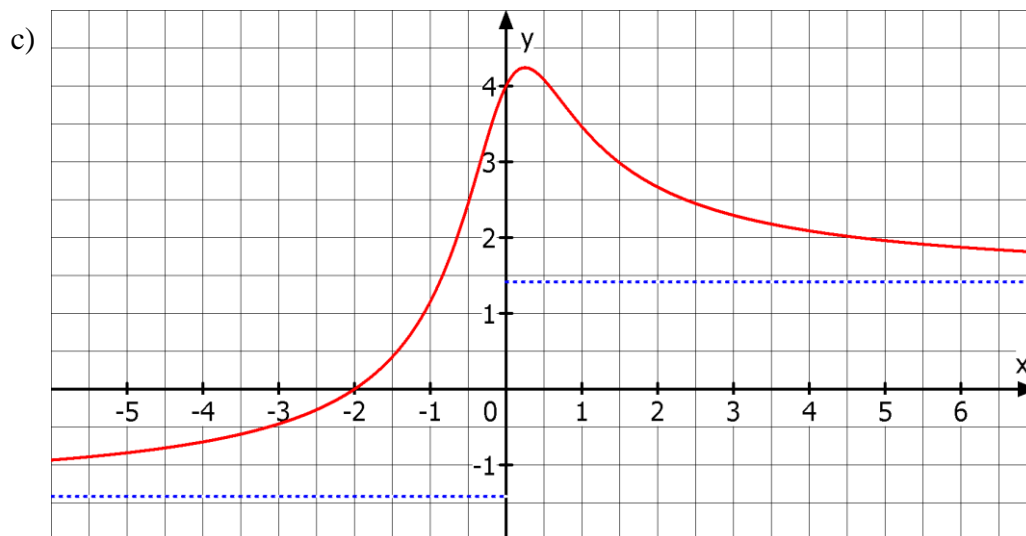
1. a) $f(x) = \frac{2x+4}{\sqrt{2x^2+1}}$; $D_f = \mathbb{R}$; $f(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2$; $f(0) = \frac{4}{\sqrt{1}} = 4$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x+4}{\sqrt{2x^2+1}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{\sqrt{2x^2}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{|x|\sqrt{2}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{2}x}{\pm x} = \pm\sqrt{2} \approx \pm 1,41$$

$$\begin{aligned} \text{b) } f'(x) &= \frac{2 \cdot \sqrt{2x^2+1} - (2x+4) \cdot \frac{4x}{2 \cdot \sqrt{2x^2+1}}}{2x^2+1} = \frac{2 \cdot (2x^2+1) - (2x+4) \cdot 2x}{(2x^2+1) \cdot \sqrt{2x^2+1}} = \\ &= \frac{4x^2+2-4x^2-8x}{(2x^2+1) \cdot \sqrt{2x^2+1}} = \frac{2-8x}{(2x^2+1) \cdot \sqrt{2x^2+1}} = \frac{2 \cdot (1-4x)}{(2x^2+1) \cdot \sqrt{2x^2+1}} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1-4x = 0 \Leftrightarrow x_2 = 0,25; \quad y_2 = f(0,25) = \frac{4,5}{\sqrt{1,125}} = 3\sqrt{2} \approx 4,24$$

x	$x < 0,25$	$x = 0,25$	$0,25 < x$
$f'(x) = \frac{2 \cdot (1-4x)}{(2x^2+1) \cdot \sqrt{2x^2+1}}$	> 0	0	< 0
G_f	streng monoton steigend	HOP(0,5 / f(0,25)) $= (0,25 / 3\sqrt{2})$	streng monoton fallend



2. a) $f_k(x) = 0,5x^3 + kx^2 + 6x \Rightarrow f'_k(x) = 1,5x^2 + 2kx + 6$

$$f'_k(x) = 0 \Leftrightarrow 1,5x^2 + 2kx + 6 = 0 \text{ muss zwei einfache Nullstellen besitzen, d.h.}$$

$$D = (2k)^2 - 4 \cdot 1,5 \cdot 6 > 0 \Leftrightarrow 4k^2 > 4 \cdot 1,5 \cdot 6 \Leftrightarrow k^2 > 9 \Leftrightarrow |k| > 3 \text{ also } k \in \mathbb{R} \setminus [-3; 3]$$

b) $f'_k(x) = 0 \Leftrightarrow 1,5x^2 + 2kx + 6 = 0$ muss eine doppelte Nullstellen besitzen, d.h.

$$D = (2k)^2 - 4 \cdot 1,5 \cdot 6 = 0 \Leftrightarrow 4k^2 = 4 \cdot 9 \Leftrightarrow k^2 = 9 \Leftrightarrow k = \overset{k>0}{+3}$$

$$f'_3(x) = 1,5x^2 + 2 \cdot 3x + 6 = 1,5 \cdot (x^2 + 4x + 4) = 1,5 \cdot (x+2)^2 \text{ also}$$

$$\text{TP}(-2 / f_3(-2)) \text{ und } f_3(-2) = 0,5 \cdot (-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 + 6 \cdot (-2) = -4$$

also Terrassenpunkt TP(-2/-4) für $k=3$.