Q11 * Mathematik * Exponentialgleichungen (Wiederholung 10. Klasse)

1. Bestimmen Sie alle Lösungen zunächst exakt und geben Sie diese dann auf Hundertstel gerundet an!

a) $2\cdot 3^x = 4$ b) $2+3\cdot 4^x = 5+6\cdot 7$

c) $2\cdot 3^{4x-5} = 6+7$ d) $100 - 5^{2x+1} = 50 - 5^2$

e) $(2+3^{4x-5})^2 + 6 = 127$ f) $2^{2x+1} - 4^3 = 8$

g) $5^x = 3^x$ h) $5^x = 3^{x+1}$

i) $4\cdot 2^{x+3} = 5^{2x}$ j) $0,5\cdot 3^{2x+1} = 2^{x+5}$

2. Lösen Sie die Gleichung ohne Verwendung des Taschenrechners.

a) $\lg(5x-10) = 2$ b) $\log_3(x^2-7) = 2$

c) $\log_x(5^2-3^2) = 4$ d) $\log_{2x} 81 = 3$

e) $\log_4 0,25 = x+1$ f) $\log_{0,5} 8 = x+2$

g) $1 - 0,5x = \log_3(9\sqrt{3})$ h) $\log_{0,5}(2\sqrt{2}) = x+0,5$

3. Die folgenden Gleichungen lassen sich auf quadratische Gleichungen zurückführen. Lösen Sie die Gleichungen ohne Verwendung des Taschenrechners.

$3^{2x} - 6 = 5\cdot 3^x \Leftrightarrow (3^x)^2 - 5\cdot(3^x) - 6 = 0$ Substitution $u=3^x$

$u^2 - 5\cdot u - 6 = 0 \Leftrightarrow u_{1/2} = \frac{1}{2}\cdot(5 \pm \sqrt{25-4\cdot 1\cdot(-6)}) = \frac{1}{2}\cdot(5\pm\sqrt{49}) = \frac{1}{2}\cdot(5\pm 7) \Leftrightarrow$

$u_1 = 6$; $(u_2 = -1)$; also $3^x = 6 \Leftrightarrow x = \log_3 6 \approx 1,63$ ($3^x = -1$ hat keine Lösung!)

a) $2^{2x} = 3\cdot 2^x + 4$ b) $12\cdot 3^x - 3^{2x} = 27$

c) $2^{2x} + 2 = 8,25\cdot 2^x$ d) $3^{2x} = 8\cdot 3^{x+1} + 81$

e) $4\cdot 2^{2x} + 31\cdot 2^x = 8$ f) $1000\cdot 10^{2x} = 1 - 90\cdot 10^x$

g) $0,5^{2x} = 32 + 4\cdot 0,5^x$ h) $0,5^{2x} - 0,5^{-3} = 0,5^{x-1}$

4. Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung.

a) $e^{2x-1} = 5$ b) $2\cdot e^{3x} = 3\cdot e^{2-x}$

c) $(2x^2-7)\cdot e^{x+1} = e^{x+1}$ d) $(x-3)\cdot e^{2x} = (x-3)\cdot e^{x+2}$

e) $e^{\sqrt{x}} = 2 - e^{-\sqrt{x}}$ f) $e^{2x} = 4 + 3e^x$

Q11 * Mathematik * Exponentialgleichungen * Lösungen

1. a) $2\cdot 3^x = 4 \Leftrightarrow 3^x = 2 \Leftrightarrow x = \log_3 2 = 0,6309... \approx 0,63$

   b) $2+3\cdot 4^x = 5+6\cdot 7 \Leftrightarrow 3\cdot 4^x = 45 \Leftrightarrow 4^x = 15 \Leftrightarrow x = \log_4 15 = 1,953... \approx 1,95$

   c) $2\cdot 3^{4x-5} = 6+7 \Leftrightarrow 3^{4x-5} = 6,5 \Leftrightarrow 4x-5 = \log_3 6,5 \Leftrightarrow$

   $x = 0,25\cdot(5+\log_3 6,5) = 1,675... \approx 1,68$

   d) $100 - 5^{2x+1} = 50 - 5^2 \Leftrightarrow 5^{2x+1} = 75 \Leftrightarrow 2x+1 = \log_5 75 \Leftrightarrow$

   $x = 0,5\cdot(-1+\log_5 75) = 0,841... \approx 0,84$

   e) $(2+3^{4x-5})^2 + 6 = 127 \Leftrightarrow 2+3^{4x-5} = \sqrt{121} \Leftrightarrow 3^{4x-5} = 9 \Leftrightarrow 4x-5 = 2 \Leftrightarrow x = 1,75$

   f) $2^{2x+1} - 4^3 = 8 \Leftrightarrow 2^{2x+1} = 72 \Leftrightarrow 2x+1 = \log_2 72 \Leftrightarrow x = 0,5\cdot(-1+\log_2 72) = 2,584... \approx 2,58$

   g) $5^x = 3^x \Leftrightarrow x\cdot \lg 5 = x\cdot \lg 3 \Leftrightarrow x\cdot(\lg 5 - \lg 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

   h) $5^x = 3^{x+1} \Leftrightarrow x\cdot \lg 5 = (x+1)\cdot \lg 3 \Leftrightarrow x\cdot(\lg 5 - \lg 3) = \lg 3 \Leftrightarrow x = \dfrac{\lg 3}{\lg 5 - \lg 3} = 2,150... \approx 2,15$

   i) $4\cdot 2^{x+3} = 5^{2x} \Leftrightarrow 2^{x+5} = 5^{2x} \Leftrightarrow (x+5)\cdot \lg 2 = 2x\cdot \lg 5 \Leftrightarrow x\cdot(\lg 2 - 2\cdot \lg 5) = -5\cdot \lg 2 \Leftrightarrow$

   $x = \dfrac{5\cdot \lg 2}{\lg 5^2 - \lg 2} = x = \dfrac{\lg 32}{\lg 12,5} = 1,372... \approx 1,37$

   j) $0,5\cdot 3^{2x+1} = 2^{x+5} \Leftrightarrow 3^{2x+1} = 2\cdot 2^{x+5} \Leftrightarrow 3^{2x+1} = 2^{x+6} \Leftrightarrow (2x+1)\cdot \lg 3 = (x+6)\cdot \lg 2 \Leftrightarrow$

   $(2x+1)\cdot \lg 3 = (x+6)\cdot \lg 2 \Leftrightarrow x\cdot(2\cdot \lg 3 - \lg 2) = 6\cdot \lg 2 - \lg 3 \Leftrightarrow$

   $x = \dfrac{\lg 64 - \lg 3}{\lg 9 - \lg 2} = 2,034... \approx 2,03$

2. a) $\lg(5x-10) = 2 \Leftrightarrow 10^2 = 5x-10 \Leftrightarrow 5x = 110 \Leftrightarrow x = 22$

   b) $\log_3(x^2-7) = 2 \Leftrightarrow 3^2 = x^2 - 7 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 4$

   c) $\log_x(5^2-3^2) = 4 \Leftrightarrow x^4 = 25-9 \Leftrightarrow x^4 = 16 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 2$

   d) $\log_{2x} 81 = 3 \Leftrightarrow (2x)^3 = 81 \Leftrightarrow 2x = \sqrt[3]{81} \Leftrightarrow x = 0,5\cdot 3\cdot \sqrt[3]{3} \Leftrightarrow x = 1,5\cdot \sqrt[3]{3}$

   e) $\log_4 0,25 = x+1 \Leftrightarrow x = -1-1 = -2$

   f) $\log_{0,5} 8 = x+2 \Leftrightarrow x = -2-3 = -5$

   g) $1 - 0,5x = \log_3(9\sqrt{3}) \Leftrightarrow 0,5x = 1 - 2,5 \Leftrightarrow x = -3$

   h) $\log_{0,5}(2\sqrt{2}) = x+0,5 \Leftrightarrow x = -0,5 - 1,5 = -2$

3.

a) $2^{2x} = 3 \cdot 2^x + 4$; mit $u = 2^x \Rightarrow u^2 - 3u - 4 = 0$; $(u_1 = -1), u_2 = 4$; $2^x = 4 \Leftrightarrow x = 2$

b) $12 \cdot 3^x - 3^{2x} = 27$; mit $u = 3^x \Rightarrow u^2 - 12u + 27 = 0 \Leftrightarrow u_1 = 9$; $u_2 = 3$;

also $3^x = 9$, $x_1 = 2$; $3^x = 3$, $x_2 = 1$

c) $2^{2x} + 2 = 8,25 \cdot 2^x$; mit $2^x = u \Rightarrow u^2 - 8,25u + 2 = 0$; $u_{1/2} = \frac{1}{2} \cdot (8,25 \pm \sqrt{8,25^2 - 4 \cdot 2}) \Rightarrow$

$u_{1/2} = \frac{1}{2} \cdot (8,25 \pm 7,75)$; $u_1 = 8$, $u_2 = 0,25$; $2^x = 8 \Rightarrow x_1 = 3$; $2^x = 0,25 \Rightarrow x_2 = -2$

d) $3^{2x} = 8 \cdot 3^{x+1} + 81$, mit $3^x = u \Rightarrow u^2 - 24u - 81 = 0$; $u_1 = 27$, $(u_2 = -6)$; $3^x = 27 \Rightarrow x = 3$

e) $4 \cdot 2^{2x} + 31 \cdot 2^x = 8$, mit $2^x = u \Rightarrow 4u^2 + 31u - 8 = 0$; $u_1 = 0,25$, $(u_2 = -8)$; $2^x = 8 \Rightarrow x = 3$

f) $1000 \cdot 10^{2x} = 1 - 90 \cdot 10^x$, mit $10^x = u \Rightarrow 1000u^2 + 90u - 1 = 0 \Leftrightarrow u_1 = 0,01$, $(u_2 = -0,1)$

$10^x = 0,01 \Rightarrow x = -2$

g) $0,5^{2x} = 32 + 4 \cdot 0,5^x$ mit $0,5^x = u \Rightarrow u^2 - 4u - 32 = 0 \Leftrightarrow u_1 = 8$, $(u_2 = -4)$; $0,5^x = 8 \Rightarrow x = -3$

h) $0,5^{2x} - 0,5^{-3} = 0,5^{x-1}$ mit $0,5^x = u \Rightarrow u^2 - 2u - 8 = 0 \Leftrightarrow u_1 = 4$, $(u_2 = -2)$;

$0,5^x = 4 \Rightarrow x = -2$

4. a) $e^{2x-1} = 5 \Leftrightarrow 2x - 1 = \ln 5 \Leftrightarrow x = \frac{1 + \ln 5}{2} \approx 1,30$

b) $2 \cdot e^{3x} = 3 \cdot e^{2-x} \Leftrightarrow e^{3x} = \frac{1,5 \cdot e^2}{e^x} \Leftrightarrow e^{4x} = 1,5 \cdot e^2 \Leftrightarrow 4x = \ln 1,5 \cdot e^2 \Leftrightarrow$

$4x = \ln e^2 + \ln 1,5 \Leftrightarrow 4x = 2 + \ln 1,5 \Leftrightarrow x = 0,5 + 0,25 \cdot \ln 1,5 \approx 0,60$

c) $(2x^2 - 7) \cdot e^{x+1} = e^{x+1} \Leftrightarrow (2x^2 - 7) = 1 \Leftrightarrow 2x^2 = 8 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 2$

d) $(x - 3) \cdot e^{2x} = (x - 3) \cdot e^{x+2} \Leftrightarrow x_1 = 3$

oder $e^{2x} = e^{x+2} \Leftrightarrow e^x \cdot e^x = e^x \cdot e^2 \Leftrightarrow e^x = e^2 \Leftrightarrow x_2 = 2$

e) $e^{\sqrt{x}} = 2 - e^{-\sqrt{x}} \Leftrightarrow e^x = 2 \cdot e^{\sqrt{x}} - 1$ mit $u = e^{\sqrt{x}}$ also

$u^2 - 2u + 1 = 0 \Leftrightarrow (u-1)^2 = 0 \Leftrightarrow u = 1$ also $e^{\sqrt{x}} = 1 \Leftrightarrow x = 0$

f) $e^{2x} = 4 + 3e^x \Leftrightarrow e^{2x} - 3e^x - 4 = 0 \Leftrightarrow (e^x - 4) \cdot (e^x + 1) = 0 \Leftrightarrow$

$e^x = 4$ (oder $e^x = -1$; keine Lösung!) $\Leftrightarrow x = \ln 4 \approx 1,39$