

Q12 * Mathematik * Ebenen und Geraden im \mathbb{R}^3

1. Gegeben sind im \mathbb{R}^3 die Ebene $E: x_1 - kx_2 + 2x_3 - 4 = 0$ ($k \neq 0$) und

$$\text{die Gerade } g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie k so, dass g parallel zu E verläuft. Gilt dann $g \subseteq E$?

2. Gegeben sind im \mathbb{R}^3 die Ebene $E: x_1 - 3x_2 + 2x_3 - a = 0$ ($a \in \mathbb{R}$) und

$$\text{die Gerade } g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} k \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (k \in \mathbb{R}).$$

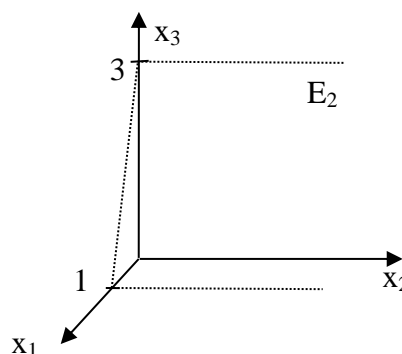
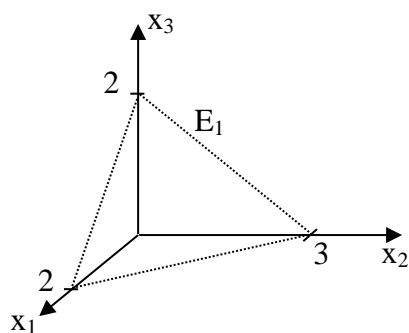
- a) Zunächst gelte $a = 4$. Bestimmen Sie k so, dass g parallel zu E verläuft. Begründen Sie, dass dann $g \cap E = \{ \}$ gilt.
- b) Nun gelte $k = 7$, d.h. g verläuft parallel zu E . Bestimmen Sie a so, dass $g \subseteq E$ gilt.



3. Gegeben ist im \mathbb{R}^3 die Ebene $E: 2x_1 - x_3 - 3 = 0$.

- a) Geben Sie eine Gerade g an, die ganz in E liegt.
- b) Geben Sie zwei von E verschiedene Ebenen F_1 und F_2 an, die ebenfalls g enthalten.
- c) Geben Sie eine Gerade k so an, dass gilt $k \subseteq F_1$ und $k \cap E = \{ \}$. Fertigen Sie eine Skizze an!

4. Die beiden Bilder zeigen die Ebenen E_1 und E_2 .



- a) Geben Sie E_1 und E_2 in Koordinatenform an und bestimmen Sie die Schnittgerade der beiden Ebenen.
- b) Zeichnen Sie die beiden Ebenen in ein gemeinsames Koordinatensystem. Kennzeichnen Sie die Schnittgerade und geben Sie die zugehörige Gleichung an.

Q12 * Mathematik * Ebenen und Geraden im \mathbb{R}^3 * Lösungen

1. $k = \frac{5}{2}$; d.h. $E: 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 - 8 = 0$

$A(1/2/3) \in g$ und $A(1/2/3) \notin E$, d.h. $g \cap E = \{ \}$

2. a) Für $k = 7$ gilt $g \cap E = \{ \}$, d.h. g verläuft parallel zu E .

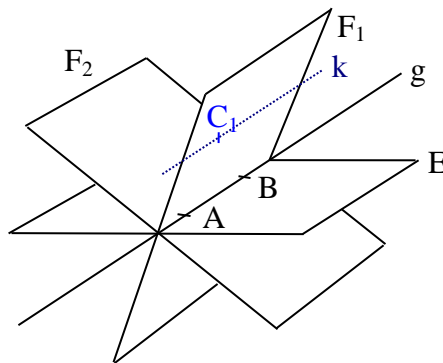
b) Für $k = 7$ und $a = 5$ gilt $g \subseteq E$.

3. a) $A(1/0/-1) \in E$ und $B(0/0/-3) \in E$, d.h. $g: \vec{X} = \vec{B} + r \cdot \vec{BA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ passt.

b) $C_1(1/0/0) \notin E$ und $C_2(0/1/0) \notin E$, d.h. \vec{BC}_1 und \vec{BC}_2 sind keine Richtungsvektoren von Ebene E . Damit sind geeignete Ebenen z.B.

$F_1: \vec{X} = \vec{B} + s \cdot \vec{BA} + t \cdot \vec{BC}_1$ und $F_2: \vec{X} = \vec{B} + p \cdot \vec{BA} + q \cdot \vec{BC}_2$

c) Die Gerade k muss parallel zu E und damit parallel zu g liegen. Wählt man als Aufpunkt von k den Punkt $C_1(1/0/0) \notin E$, so erhält man $k: \vec{X} = \vec{C}_1 + w \cdot \vec{BA}$.



4. a) $E_1: 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$ und $E_2: 3x_1 + x_3 = 3$ und

Schnittgerade z.B. $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1,5 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$

b) Die Spurgeraden von E_1 und E_2 in der x_1 - x_2 -Ebene bzw. der x_1 - x_3 -Ebene schneiden sich ersichtlich in den beiden Punkten $T(1/1,5/0)$ und $S(0,5/0/1,5)$. (S berechnen in x_1 - x_3 -Ebene)

Damit erhält man für die Schnittgerade

$g: \vec{X} = \vec{T} + r \cdot \vec{TS}$ bzw.

$g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1,5 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -0,5 \\ -1,5 \\ 1,5 \end{pmatrix}$ oder $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1,5 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$

