

Q12 * Mathematik * Ebenen im \mathbb{R}^3

1. Die beiden Ebenen E_1 und E_2 sind durch die Punkte $A(1/2/3)$, $B(3/3/3)$ und $C(5/4/4)$ bzw. $P(3/2/3)$, $Q(2/3/4)$ und $R(6/6/7)$ festgelegt.
Bestimmen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden g der beiden Ebenen.
2. Die Ebene E ist durch die drei Punkte $A(1/2/3)$, $B(3/6/2)$ und $C(3/1/1)$ festgelegt.
Die Gerade g geht durch die beiden Punkte $P(2/1/1)$ und $Q(-1/-1/3)$.
Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Geraden g mit der Ebene E .
3. Die Ebene E ist durch die drei Punkte $A(2/-3/4)$, $B(1/0/2)$ und $C(-2/3/4)$ festgelegt.
Bestimmen Sie die Schnittgerade der Ebene E mit der
 - a) x_1x_2 -Ebene,
 - b) x_1x_3 -Ebene,
 - c) x_2x_3 -Ebene.
4. Die Ebene E ist durch die drei Punkte $A(1/0/-2)$, $B(2/2/-2)$ und $C(1/-6/1)$ festgelegt.
 - a) Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden g durch $P(1/4/2)$, welche die Ebene E senkrecht schneidet.
 - b) Bestimmen Sie den Abstand des Punktes P von der Ebene E .



Q12 * Mathematik * Ebenen im \mathbb{R}^3

1. Die beiden Ebenen E_1 und E_2 sind durch die Punkte $A(1/2/3)$, $B(3/3/3)$ und $C(5/4/4)$ bzw. $P(3/2/3)$, $Q(2/3/4)$ und $R(6/6/7)$ festgelegt.
Bestimmen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden g der beiden Ebenen.
2. Die Ebene E ist durch die drei Punkte $A(1/2/3)$, $B(3/6/2)$ und $C(3/1/1)$ festgelegt.
Die Gerade g geht durch die beiden Punkte $P(2/1/1)$ und $Q(-1/-1/3)$.
Bestimmen Sie den Schnittpunkt S der Geraden g mit der Ebene E .
3. Die Ebene E ist durch die drei Punkte $A(2/-3/4)$, $B(1/0/2)$ und $C(-2/3/4)$ festgelegt.
Bestimmen Sie die Schnittgerade der Ebene E mit der
 - a) x_1x_2 -Ebene,
 - b) x_1x_3 -Ebene,
 - c) x_2x_3 -Ebene.
4. Die Ebene E ist durch die drei Punkte $A(1/0/-2)$, $B(2/2/-2)$ und $C(1/-6/1)$ festgelegt.
 - a) Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden g durch $P(1/4/2)$, welche die Ebene E senkrecht schneidet.
 - b) Bestimmen Sie den Abstand des Punktes P von der Ebene E .



Q12 * Mathematik * Ebenen im \mathbb{R}^3 * Lösungen

$$1. E_1: \vec{X} = \vec{A} + r \cdot \vec{AB} + s \cdot \vec{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad E_2: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$E_1 \cap E_2 = g: \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$(1) \quad 2r + 4s = 1 + t + 4u \Rightarrow (1') \quad 2r + 4 - 4t + 12u = 1 + t + 4u \Leftrightarrow 2r = -3 + 5t - 8u$$

$$(2) \quad r + 2s = 1 - t + 3u \Rightarrow (2') \quad r + 2 - 2t + 6u = 1 - t + 3u \Rightarrow r = -1 + t - 3u \text{ in (1')}$$

$$(3) \quad s = 1 - t + 3u \text{ in (1) und (2)}$$

$$(1'') \quad -2 + 2t - 6u = -3 + 5t - 8u \Leftrightarrow 1 + 2u = 3t \Leftrightarrow u = 1,5t - 0,5 \text{ in } E_2 \text{ eingesetzt}$$

$$g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + (1,5t - 0,5) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4,5 \\ 4,5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1,5 \\ 1,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1,5 \\ 2,5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 3,5 \\ 3,5 \end{pmatrix}$$

$$\text{wegen } \begin{pmatrix} 7 \\ 3,5 \\ 3,5 \end{pmatrix} = 3,5 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ schöner } g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1,5 \\ 2,5 \end{pmatrix} + t^* \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ wegen } \begin{pmatrix} 0 \\ 1,5 \\ 2,5 \end{pmatrix} + 0,5 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in g$$

$$\text{kann man als Aufpunkt von } g \text{ auch } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ verwenden, also } g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t^{**} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$2. E: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$E \cap g = \{S\}: \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$(1) \quad 2r + 2s - 3t = 1 \quad \Rightarrow (1') \quad 2r + 8r - 4t + 2 - 3t = 1 \Rightarrow 10r - 7t = -1$$

$$(2) \quad 4r - s - 2t = -1 \Rightarrow s = 4r - 2t + 1 \text{ in (1) und (2)}$$

$$(3) \quad -r - 2s + 2t = -2 \quad \Rightarrow (3') \quad -r - 8r + 4t - 2 + 2t = -2 \Rightarrow 6t = 9r \Rightarrow t = 1,5r \text{ in (1')}$$

$$(1'') \quad 10r - 10,5r = -1 \Rightarrow r = 2 \text{ und } t = 3 \text{ und } s = 4 \cdot 2 - 2 \cdot 3 + 1 = 3 \text{ und } S(11/7/-5)$$



$$3. \text{ a) } E: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } x_1x_2\text{-Ebene: } \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$E \cap x_1x_2\text{-Ebene} = g_1$ liefert sofort: (3) $2 + 2r + 2s = 0 \Rightarrow s = -1 - r$ liefert in E eingesetzt g_1

$$g_1: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + (-1-r) \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3 \\ 0-3 \\ 2-2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1+3 \\ -3-3 \\ 2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) $E \cap x_1x_3\text{-Ebene} = g_2$ liefert sofort: $0 - 3r + 3s = 0$ also $r = s$ in E eingesetzt:

$$g_2: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

c) $E \cap x_2x_3\text{-Ebene} = g_2$ liefert sofort: $1 + r - 3s = 0$ also $r = 3s - 1$ in E eingesetzt:

$$g_2: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + (3s-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 \\ 0+3 \\ 2-2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3+3 \\ 3-9 \\ 2+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$4. E: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}; \text{ Normalenvektor } \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-0 \\ 0-3 \\ -6-0 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{a) } g: \vec{X} = \vec{P} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } E \cap g = \{S\}: \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$(1) \quad 1+r = 1+2t \Rightarrow r = 2t \text{ in (2) und (3)}$$

$$(2) \quad 2r-6s = 4-t \Rightarrow 4t-6s = 4-t \Rightarrow 5t = 6s+4 \Rightarrow 5t = 8-4t+4 \Rightarrow 9t = 12 \Rightarrow t = \frac{4}{3}$$

$$(3) \quad -2+3s = 2-2t \Rightarrow 3s = 4-2t \text{ in (2)}$$

$$\text{also } \vec{S} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{4}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11/3 \\ 8/3 \\ -2/3 \end{pmatrix} \text{ und } d(E,P) = |\overline{SP}| = \left| \begin{pmatrix} -8/3 \\ 4/3 \\ 8/3 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{64+16+64} = \frac{12}{3} = 4$$

