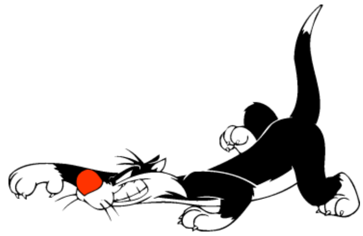
Q12 * Mathematematik * Geraden im R^3



1. Gegeben sind die drei Geraden g, h und k in der so genannten Punkt-Richtungsform.

$$g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad k: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   a) Zeigen Sie, dass sich g und h in einem Punkt S schneiden, und bestimmen Sie die Koordinaten von S.

   b) Zeigen Sie, dass g und k windschief zueinander sind.

   c) Bestimmen Sie den Abstand der beiden windschiefen Geraden g und k zueinander. (Hinweis: Es gibt eine Strecke [PQ], deren Endpunkte P und Q auf g bzw. k liegen, und die senkrecht zu g und k liegt. Die Streckenlänge von [PQ] entspricht dem gesuchten Abstand.)

2. Die Gerade AB zu den Punkten A(1/2/3) und B(3/-2/1) schneidet die x_1x_3-Ebene in einem Punkt P.
   Bestimmen Sie die Koordinaten von P.

3. Bestimmen Sie den Abstand des Punktes P(8/4/7) von der Geraden AB mit den Punkten A(1/2/3) und B(7/6/-1).

4. Gegeben ist die Gerade $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ und der Punkt $P(4/4/-3)$.

   a) Bestimmen Sie die Gleichung einer Geraden h, die parallel zu g im Abstand 6 verläuft.

   b) Bestimmen Sie die Gleichung einer Geraden k, die g senkrecht schneidet und durch den Punkt P geht.

Q12 * Mathematematik * Geraden im $\mathbb{R}^3$ * Lösungen

1\. a) $g \cap h: \begin{pmatrix}5\\0\\1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\1\\4\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow r=-2$ und $s=-1$ und $S(1/-2/3)$

b) $g \cap k: \begin{pmatrix}5\\0\\1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\-4\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}$ führt zu einem Widerspruch! Also $g \cap k = \{\}$

c) $\vec{n} \perp \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ und $\vec{n} \perp \begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}$ liefert $\vec{n} = \begin{pmatrix}2\\1\\5\end{pmatrix}$

Der Ansatz $\begin{pmatrix}5\\0\\1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} + q\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\-4\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}$ liefert $r=1,\ q=-1,\ t=-1$

und damit $P(7/1/0)$ und $Q(5/0/-5)$ und $\overline{PQ} = \left|-1\cdot\vec{n}\right| = \sqrt{4+1+25} = \sqrt{30}$

2\. $AB: \vec{X} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + r^*\cdot\begin{pmatrix}2\\-4\\-2\end{pmatrix}$ oder "schöner" $AB: \vec{X} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$

Für die x_1x_3-Ebene gilt: $x_2 = 0$, also $P(p_1/0/p_3)$ und damit

$\begin{pmatrix}p_1\\0\\p_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix} \Rightarrow r=1$ und $P(2/0/2)$

3\. $AB: \vec{X} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + r^*\cdot\begin{pmatrix}6\\4\\-4\end{pmatrix}$ oder "schöner" $AB: \vec{X} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\-2\end{pmatrix}$

Projektion von $\overrightarrow{AP}$ auf $\overrightarrow{AB}$ liefert $\overrightarrow{AF} = \dfrac{\overrightarrow{AP}\circ\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AB}^2}\cdot\overrightarrow{AB}$ mit $\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix}7\\2\\4\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AF} = \dfrac{7\cdot6+2\cdot4+4\cdot(-4)}{36+16+16}\cdot\begin{pmatrix}6\\4\\-4\end{pmatrix} = \dfrac{34}{68}\cdot\begin{pmatrix}6\\4\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\\-2\end{pmatrix}$ also

$\vec{F} = \vec{A} + \overrightarrow{AF} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\2\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\4\\1\end{pmatrix}$ und Abstand $d = \overline{FP} = \left\|\begin{pmatrix}4\\0\\6\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{16+0+36} = \sqrt{52} = 2\cdot\sqrt{13}$

4\.a) $\vec{n} = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$ und $|\vec{n}| = 3$ also $h: \vec{X} = \begin{pmatrix}4\\1\\3\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\3\\7\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$

b) Für den Fußpunkt F des Lots von P auf g gilt $\overrightarrow{PF} \perp \begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$, also (mit $F \in g$)

$0 = \begin{pmatrix}4+s-4\\1+2s-4\\3-2s+3\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix} = s+4s-6+4s-12 = 9s-18 \Rightarrow s=2$ und $\vec{F} = \begin{pmatrix}4+2\\1+2\cdot2\\3-2\cdot2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\5\\-1\end{pmatrix}$

$k: \vec{X} = \vec{P} + q\cdot\overrightarrow{PF} = \begin{pmatrix}4\\4\\-3\end{pmatrix} + q\cdot\begin{pmatrix}6-4\\5-4\\-1+3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\4\\-3\end{pmatrix} + q\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$