

Q12 * Mathematik * Testen von Hypothesen

Defekte Maschine?

Der Geschäftsinhaber einer Glühbirnenfabrik hat den Verdacht, dass eine Maschine seit einiger Zeit eine erhöhte Anzahl defekter Glühbirnen herstellt.

Normal produziert die Maschine 20% Ausschuss. Man vermutet nun einen höheren Anteil der Ausschussstücke.

Ein Testverfahren soll Klarheit schaffen. Man testet 100 Glühbirnen.

Da eine neue Maschine oder Reparatur sehr teuer ist, will man das Risiko, die Maschine als nicht funktionsfähig einzustufen, sehr gering halten (höchstens 3%).

Entwickeln Sie einen geeigneten Test und bestimmen Sie den zugehörigen Ablehnungs-bereich!



Wechsel einer Herstellerfirma

Ein Supermarkt will seine Joghurtbecher von einer anderen Firma beziehen und erwartet dadurch weniger Beschädigungen. Die Nullhypothese "Die neuen Becher sind mindestens genau so anfällig gegen Beschädigungen wie die alten " soll auf der Basis von 200

Joghurtbechern und dem Signifikanzniveau 5% getestet werden.

Bestimmen Sie die Entscheidungsregel, falls die Wahrscheinlichkeit für einen beschädigten Becher zunächst bei 4% liegt.

Infizierungsrate einer Tierpopulation (nach LK-M-Abitur 2002 Sachsen-Anhalt)

Bei einer Tierpopulation sind durchschnittlich 3% der Tiere mit dem Erreger der Krankheit K infiziert.

Bei einem Blutschnelltest werden 85% der infizierten Tiere als solche erkannt.

Irrtümlich werden aber auch 20% der nicht infizierten Tiere durch den Test als infiziert eingestuft.

a) Nach dem Test wird ein Tier als nicht infiziert eingestuft.

Weisen Sie nach, dass dann das Tier mit einer Wahrscheinlichkeit von weniger als 1% tatsächlich infiziert ist.

b) Nach dem Test wird ein Tier als infiziert eingestuft. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist das Tier tatsächlich infiziert?

Das verstärkte Auftreten der Krankheit K lässt Experten vermuten, dass die Infizierungsrate auf mindestens 10% angestiegen ist. In einer Studie soll diese Vermutung an 200 Tieren getestet werden.

Entwickeln Sie einen Test und berechnen Sie auf dem Signifikanzniveau von 1% den Ablehnungsbereich.

Gezinkter Würfel?

Jemand behauptet, dass ein Würfel gezinkt ist und daher die Wahrscheinlichkeit, eine Ziffer größer als 3 zu werfen, nicht 50% sondern nur 30% beträgt. Um die Behauptung zu überprüfen, spielt er 200mal. Ergeben sich dabei höchstens 75 Würfe mit Ziffern größer als 3, wird die Behauptung angenommen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird seine Behauptung

a) irrtümlich verworfen ?

b) irrtümlich angenommen ?



Q12 * Mathematik * Testen von Hypothesen * Lösungen

Defekte Maschinen

$$H_0 : p \leq 20\% \quad A = \{0, 1, \dots, k\} ; \bar{A} = \{k+1, \dots, 100\}$$

$$P_{p \leq 20\%}^{100}(\bar{A}) \leq 3\% \Leftrightarrow P_{p \leq 20\%}^{100}(x \geq k+1) \leq 3\% \Leftrightarrow 1 - P_{p \leq 20\%}^{100}(x \leq k) \leq 3\% \Leftrightarrow$$

$$P_{p \leq 20\%}^{100}(x \leq k) \geq 97\% \Leftrightarrow P_{p=20\%}^{100}(x \leq k) \geq 97\% \Leftrightarrow k \geq 28$$

$$\text{Entscheidungsregel: } A = \{0, 1, \dots, 28\} ; \bar{A} = \{29, \dots, 100\}$$



Wechsel einer Herstellerfirma

$$H_0 : p \geq p_{\text{alt}} = 4\% \quad A = \{k+1, \dots, 200\} ; \bar{A} = \{0, 1, \dots, k\}$$

$$P_{p \geq 4\%}^{200}(\bar{A}) \leq 5\% \Leftrightarrow P_{p=20\%}^{200}(x \leq k) \leq 5\% \Leftrightarrow k \leq 4, \text{ wähle also } k = 4$$

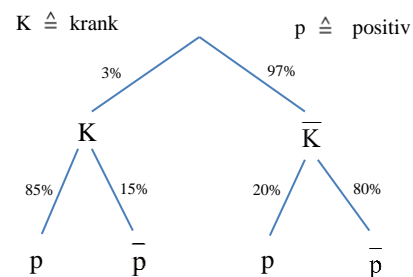
$$A = \{5, \dots, 200\} ; \bar{A} = \{0, 1, \dots, 4\}$$

Infizierungsrate einer Tierpopulation

a) Bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P_p(K) = \frac{P(\bar{p} \cap K)}{P(\bar{p})} = \frac{0,03 \cdot 0,15}{0,03 \cdot 0,15 + 0,97 \cdot 0,80} \approx 0,58\%$$

$$b) \quad P_p(K) = \frac{P(p \cap K)}{P(p)} = \frac{0,03 \cdot 0,85}{0,03 \cdot 0,85 + 0,97 \cdot 0,20} \approx 11,6\%$$



$$H_0 : p < 10\% \quad A = \{0, 1, \dots, k\} ; \bar{A} = \{k+1, \dots, 200\}$$

$$P_{p < 10\%}^{200}(\bar{A}) \leq 1\% \Leftrightarrow P_{p < 10\%}^{200}(x \geq k+1) \leq 1\% \Leftrightarrow 1 - P_{p < 10\%}^{200}(x \leq k) \leq 1\% \Leftrightarrow$$

$$P_{p < 10\%}^{200}(x \leq k) \geq 99\% \Leftrightarrow P_{p=10\%}^{200}(x \leq k) \geq 99\% \Leftrightarrow k \geq 30 \quad \text{wähle also } k = 30$$

$$\text{Entscheidungsregel: } A = \{0, 1, \dots, 30\} ; \bar{A} = \{31, \dots, 200\}$$

Gezinkter Würfel?

$$H_0 : p \leq 30\% \text{ bzw. } p = 30\% \quad A = \{0, 1, \dots, 75\} ; \bar{A} = \{76, \dots, 200\}$$

$$a) \quad P_{p=30\%}^{200}(\bar{A}) = P_{p=30\%}^{200}(x \geq 76) = 1 - P_{p=30\%}^{200}(x \leq 75) = 1 - 0,99062 = 0,938\%$$

$$b) \quad P_{p=50\%}^{200}(A) = P_{p=50\%}^{200}(x \leq 75) = 0,00025 = 0,025\%$$

