Q12 * Mathematik * Zufallsgrößen

Eine Funktion X, die jedem Ergebnis ω eines Zufallsexperiments eine reelle Zahl zuordnet, heißt **Zufallsgröße**. $X : \Omega \ni \omega \mapsto X(\omega) \in \mathbb{R}$

Mit der Zufallsgröße lassen sich folgendermaßen Ereignisse festlegen:
Für ein beliebiges $x \in \mathbb{R}$ ist $A = \{\omega \,/\, X(\omega) = x\}$ ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit man kurz so schreibt: $P(A) = P(X = x)$.
Analog legt man fest: $P(X \leq x) = P(\{\omega / X(\omega) \leq x\})$

Die Funktion $W : \mathbb{R} \ni x \mapsto W(x) = P(X = x) \in [0;1]$ heißt **Wahrscheinlichkeitsverteilung** (oder auch Wahrscheinlichkeitsfunktion) der Zufallsgröße X.

Die Funktion $F : \mathbb{R} \ni x \mapsto F(x) = P(X \leq x) \in [0;1]$ heißt **kumulative Verteilungsfunktion** der Zufallsgröße X.

W wird meist als „Stabdiagramm" oder als „**Histogramm**" dargestellt.
F ist eine monoton wachsende Funktion mit $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ und $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$

Aufgaben:

1. Zufallsexperiment: Wurf zweier Laplace-Würfel
   Zufallsgröße: X = „Augensumme"
   a) Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X tabellarisch an und zeichnen Sie das zugehörige Stabdiagramm und ein Histogramm.
   b) Geben Sie die Werte von $P(X = 3)$, $P(X= 0{,}5)$, $P(3 < x < 6)$, $W(4)$ und $F(4)$ an.
   c) Geben Sie in Kurzschreibweise an P(„Die Augensumme beträgt mindestens 9") und bestimmen Sie den zugehörigen Wert.
   d) Zeichnen Sie den Graphen der Verteilungsfunktion $F(x) = P(X \leq x)$.

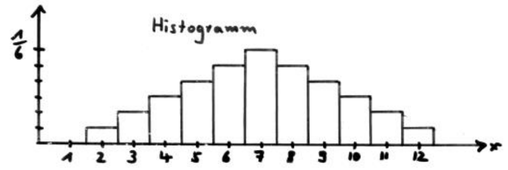
2. Anton und Berta spielen folgendes Spiel: Anton wirft zwei Würfel.
   Er bekommt von Berta den Betrag der Differenz der beiden gewürfelten Zahlen in Euro.
   Allerdings muss er Berta für jeden Wurf 2 Euro als Einsatz zahlen.
   Die Zufallsgröße G ordnet jedem Ergebnis den Reingewinn Antons in Euro zu.
   a) Erstellen Sie für G die Wahrscheinlichkeitsverteilung in Tabellenform und zeichnen Sie ein Stabdiagramm.
   b) Lohnt sich für Anton das Spiel?
   Mit welchem Gewinn oder Verlust hat Anton im Mittel zu rechnen?

3. Anton und Berta spielen folgendes Spiel: Berta wirft eine Münze 5-mal.
   Sie erhält von Anton die maximale Anzahl unmittelbar hintereinander geworfener Wappen in Euro. Auch Berta muss pro Spiel einen Einsatz von 2 Euro zahlen.
   Die Zufallsgröße G ordnet jedem Ergebnis den Reingewinn Bertas in Euro zu.
   a) Erstellen Sie für G die Wahrscheinlichkeitsverteilung in Tabellenform und zeichnen Sie ein Stabdiagramm.
   b) Lohnt sich für Berta das Spiel?
   Mit welchem Gewinn oder Verlust hat Berta im Mittel zu rechnen?

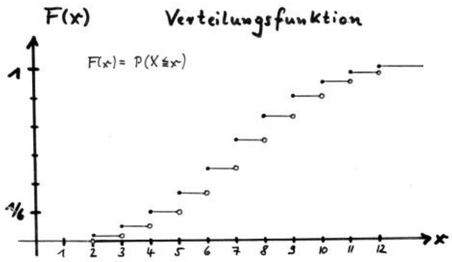
Q12 * Mathematik * Zufallsgrößen * Lösungen

1. a)

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P(X = x)	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36



d)



$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 2 \\ \frac{1}{36} & \text{falls } 2 \leq x < 3 \\ \frac{3}{36} & \text{falls } 3 \leq x < 4 \\ \frac{6}{36} & \text{falls } 4 \leq x < 5 \\ \vdots & \\ 1 & \text{falls } 12 \leq x \end{cases}$$

b) $P(X=3) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$; $P(X=0{,}5) = 0$; $P(3 < x < 6) = P(X=4) + P(X=5) = \frac{7}{36}$

$W(4) = P(X=4) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$; $F(4) = P(X \leq 4) = \frac{1+2+3}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

c) P(„Die Augensumme beträgt mindestens 9“) = $P(X \geq 9) = \frac{4+3+2+1}{36} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$

2. a)

x in €	-2	-1	0	1	2	3
P(G = x)	6/36	10/36	8/36	6/36	4/36	2/36

b) Mit einer Wahrscheinlichkeit von 6/36 verliert Anton 2 €,
mit einer Wahrscheinlichkeit von 10/36 verliert Anton 1 €, usw.

Anton kann also durchschnittlich pro Spiel mit

$$\frac{6}{36}\cdot(-2\,€) + \frac{10}{36}\cdot(-1\,€) + \frac{8}{36}\cdot(0\,€) + \frac{6}{36}\cdot(1\,€) + \frac{4}{36}\cdot(2\,€) + \frac{2}{36}\cdot(3\,€) = -\frac{2}{36}\,€$$

keinem Gewinn sondern mit einem Verlust von $\frac{2}{36}$ € rechnen.

3. a)

x in €	3	2	1	0	-1	-2
P(G = x)	1/32	2/32	5/32	11/32	12/32	1/32

b) Mit einer Wahrscheinlichkeit von 1/32 gewinnt Berta 3 €,
mit einer Wahrscheinlichkeit von 2/36 gewinnt Berta 2 €, usw.

Bertas Gewinnerwartung pro Spiel beträgt also durchschnittlich

$$\frac{1}{32}\cdot(3\,€) + \frac{2}{32}\cdot(2\,€) + \frac{5}{32}\cdot(1\,€) + \frac{11}{32}\cdot(0\,€) + \frac{12}{32}\cdot(-1\,€) + \frac{1}{32}\cdot(-2\,€) = -\frac{2}{32}\,€.$$

Auch Berta muss also mit einem durchschnittlichen Verlust von $\frac{2}{36}$ € pro Spiel rechnen.