

Q12 * Mathematik * Aufgaben zur Integralrechnung (Wiederholung)

1. Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale!
Achten Sie auf korrekte mathematische Form.

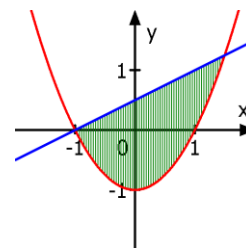
Beispiel: $\int_1^3 \frac{2}{3x^2} dx = \int_1^3 \frac{2}{3} \cdot x^{-2} dx = \left[\frac{2}{3} \cdot \frac{x^{-1}}{-1} \right]_1^3 = \left[-\frac{2}{3x} \right]_1^3 = -\frac{2}{9} - \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9}$

a) $\int_1^2 2x^2 - 3 dx$ b) $\int_0^4 3 \cdot \sqrt{2x} dx$ c) $\int_1^4 \frac{4}{\sqrt{2x}} dx$
 d) $\int_{-2}^{-1} \frac{3}{x-2} dx$ e) $\int_0^3 \frac{3x}{1+x^2} dx$ f) $\int_{-2}^2 2 \cdot \cos(\pi \cdot x) dx$

2. Bestimmen Sie alle $k \in \mathbb{R}$, so dass die angegebene Gleichung gilt.
Interpretieren Sie Ihr Ergebnis mit Hilfe einer passenden Skizze.

a) $\int_1^k 2 - x dx = 0$ b) $\int_1^k 2 - x dx = -1,5$
 c) $\int_0^k 4 - x^2 dx = 0$ d) $\int_0^k 4 - x^2 dx = \frac{11}{3}$

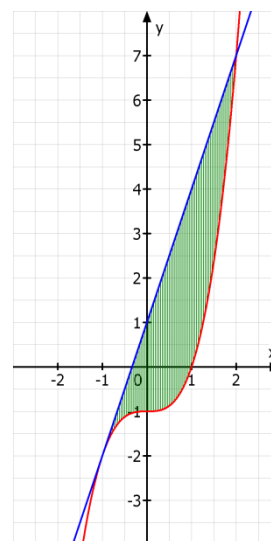
3. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^2 - 1$.
Die Normale im Punkt $(-1/0)$ des Graphen von f
begrenzt mit G_f eine Fläche mit dem Inhalt A .



Berechnen Sie diesen Flächeninhalt A .

4. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^3 - 1$
Die Tangente an G_f im Punkt $P(-1/-2)$ schließt
mit G_f eine Fläche mit dem Inhalt A ein.

Berechnen Sie diesen Flächeninhalt A .
(Siehe Bild!)



Q12 * Mathematik * Aufgaben zur Integralrechnung (Wiederholung) * Lösungen

1. a) $\int_1^2 2x^2 - 3 \, dx = \left[\frac{2x^3}{3} - 3x \right]_1^2 = \left(\frac{16}{3} - 6 \right) - \left(\frac{2}{3} - 3 \right) = \frac{5}{3}$

b) $\int_0^4 3 \cdot \sqrt{2x} \, dx = \int_0^4 3 \cdot \sqrt{2} \cdot x^{1/2} \, dx = \left[3 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{x^{1,5}}{1,5} \right]_0^4 = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 8 - 0 = 16\sqrt{2}$

c) $\int_1^4 \frac{4}{\sqrt{2x}} \, dx = \int_1^4 2 \cdot \sqrt{2} \cdot x^{-0,5} \, dx = \left[2 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{x^{0,5}}{0,5} \right]_1^4 = 4\sqrt{2} \cdot 2 - 4\sqrt{2} \cdot 1 = 4\sqrt{2}$

d) $\int_{-2}^{-1} \frac{3}{x-2} \, dx = \left[3 \cdot \ln(|x-2|) \right]_{-2}^{-1} = 3 \ln 3 - 3 \ln 4 = 3 \ln \frac{3}{4} \approx -0,863$

e) $\int_0^3 \frac{3x}{1+x^2} \, dx = \int_0^3 \frac{3}{2} \cdot \frac{2x}{1+x^2} \, dx = \left[\frac{3}{2} \cdot \ln(1+x^2) \right]_0^3 = \frac{3}{2} \cdot \ln(10) - \frac{3}{2} \cdot \ln(1) = \frac{3}{2} \cdot \ln(10) \approx 3,45$

f) $\int_{-2}^2 2 \cdot \cos(\pi \cdot x) \, dx = \left[\frac{2}{\pi} \cdot \sin(\pi \cdot x) \right]_{-2}^2 = 0 - 0 = 0$

2. a) $\int_1^k 2 - x \, dx = 0 \Leftrightarrow \left[2x - \frac{x^2}{2} \right]_1^k = 0 \Leftrightarrow 2k - 0,5k^2 - (2 - 0,5) = 0 \Leftrightarrow k^2 - 4k + 3 = 0 \Leftrightarrow k_{1/2} = \frac{1}{2} \cdot (4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 3}) = 2 \pm 1 \Leftrightarrow k_1 = 1; k_2 = 3$

b) $\int_1^k 2 - x \, dx = -1,5 \Leftrightarrow \left[2x - \frac{x^2}{2} \right]_1^k = -1,5 \Leftrightarrow 2k - 0,5k^2 - (2 - 0,5) = -1,5 \Leftrightarrow -k^2 + 4k - 3 = -3 \Leftrightarrow -k^2 + 4k = 0 \Leftrightarrow k_1 = 0; k_2 = 4$

c) $\int_0^k 4 - x^2 \, dx = 0 \Leftrightarrow \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_0^k = 0 \Leftrightarrow 4k - \frac{k^3}{3} - 0 = 0 \Leftrightarrow \frac{k}{3} \cdot (12 - k^2) = 0 \Leftrightarrow \frac{k}{3} \cdot (12 - k^2) = 0 \Leftrightarrow k_1 = 0; k_{2/3} = \pm 2\sqrt{3}$

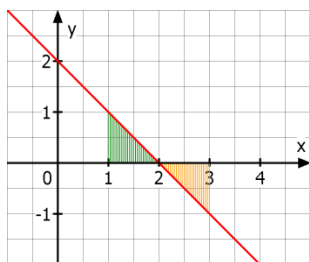
d) $\int_0^k 4 - x^2 \, dx = \frac{11}{3} \Leftrightarrow \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_0^k = \frac{11}{3} \Leftrightarrow 4k - \frac{k^3}{3} - 0 = \frac{11}{3} \Leftrightarrow k^3 - 12k + 11 = 0$

Die Lösung $x_1 = 1$ findet man durch Ausprobieren, also

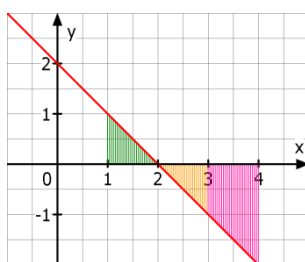
$$k^3 - 12k + 11 = 0 \Leftrightarrow (k-1) \cdot (k^2 + k - 11) = 0 \Leftrightarrow$$

$$k_1 = 1; k_{2/3} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+44}}{2} \Leftrightarrow k_1 = 1; k_{2/3} = \frac{-1 \pm 3 \cdot \sqrt{5}}{2}; k_2 \approx 2,85; k_3 \approx -3,85$$

Einzelne Bilder zu a)



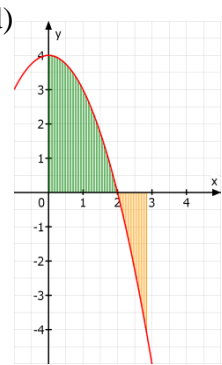
b)



c)



d)



3. $f(x) = x^2 - 1$ und $f'(x) = 2x \Rightarrow f'(-1) = -2$ also $m_{\text{Normale}} = +0,5$

Normalengleichung: $g(x) = 0,5x + t$ mit $(-1/0)$ eingesetzt: $t = 0,5$
 also $g(x) = 0,5x + 0,5$

Schnittpunkte:

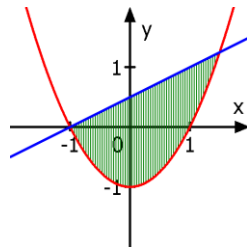
$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0,5x + 0,5 \Leftrightarrow x^2 - 0,5x - 1,5 = 0 \Leftrightarrow (x+1) \cdot (x-1,5) = 0$$

also $S_1(1/0)$ und $S_2(1,5/1,25)$

Flächeninhalt A :

$$A = \int_{-1}^{1,5} g(x) - f(x) dx = \int_{-1}^{1,5} 0,5x + 0,5 - (x^2 - 1) dx = \int_{-1}^{1,5} -x^2 + 0,5x + 1,5 dx =$$

$$\int_{-1}^{1,5} -x^2 + 0,5x + 1,5 dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4} + 1,5x \right]_{-1}^{1,5} = \frac{27}{16} - \left(-\frac{11}{12}\right) = \frac{125}{48} \approx 2,6$$



4. $f(x) = x^3 - 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2$ und $f'(-1) = 3 = m_{\text{Tangente}}$

Tangentengleichung

$g(x) = 3x + t$ mit $(-1/-2)$ eingesetzt $\Rightarrow t = 1$ und
 $g(x) = 3x + 1$

Schnittpunkte:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^3 - 1 = 3x + 1 \Leftrightarrow x^3 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^3 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x+1) \cdot (x^2 - x - 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x+1)^2 \cdot (x-2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1 ; x_2 = 2$$

Der zweite Schnittpunkt lautet also $S(2/7)$.

$$A = \int_{-1}^2 g(x) - f(x) dx = \int_{-1}^2 3x + 1 - (x^3 - 1) dx =$$

$$\int_{-1}^2 -x^3 + 3x + 2 dx = \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} + 2x \right]_{-1}^2 = 6 - \left(-\frac{3}{4}\right) = 6,75$$

