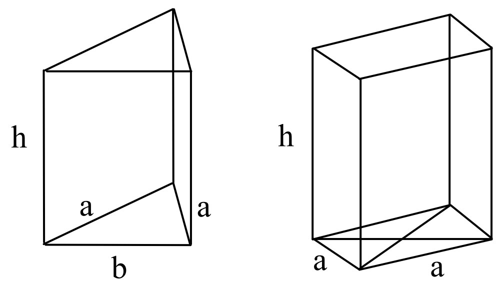
Mathe-Intensivierung * Jahrgangsstufe 9 * Prismen und Pyramiden

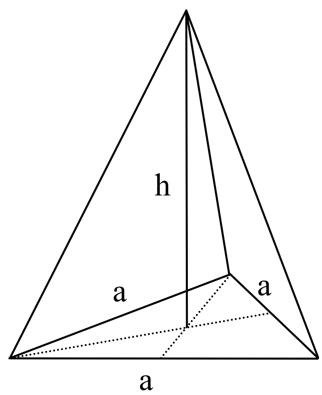
1. Berechne von den beiden abgebildeten geraden Prismen jeweils das Volumen und den Oberflächeninhalt.
   a) Die Grundfläche ist ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis $b = 4{,}0\text{cm}$ und den Schenkeln von je $3{,}0\text{cm}$ und die Höhe beträgt $5{,}0\text{cm}$.
   b) Die Grundfläche ist eine Raute mit den Diagonalen der Länge 4,0cm und 5,0cm und die Höhe hat den Wert $h = 6{,}0\text{cm}$.



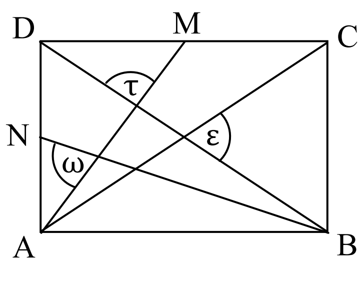
2. Ein gerades Prisma mit dem Oberflächeninhalt von $682\ \text{cm}^2$ hat das Volumen $1020\ \text{cm}^3$.
   Die Grundfläche ist eine Raute mit dem Flächeninhalt $120\ \text{cm}^2$.
   Berechne die Seitenlänge der Raute!

3. Berechne von der abgebildeten geraden Pyramide das Volumen und den Oberflächeninhalt.

   Die Grundfläche ist ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge $a = 4{,}0\text{cm}$ und die Höhe der Pyramide beträgt $h = 5{,}0\text{cm}$.

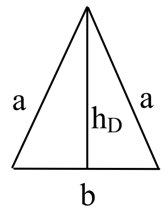


4. Das Rechteck ABCD hat die Kantenlängen $\overline{AB} = 8{,}0\text{cm}$ und $\overline{BC} = 6{,}0\text{cm}$.
   M ist der Mittelpunkt der Strecke [CD] und N ist der Mittelpunkt von [AD].
   Berechne auf $0{,}1^\circ$ genau unter welchem Winkel sich die folgenden Strecken schneiden:
   a) die Diagonalen [AC] und [BD],
   b) [AM] und [BD],
   c) [AM] und [BN].



5. Zeichne die beiden Geraden g und h mit den Funktionsgleichungen $y = 0{,}5x + 1$ und $y = 1{,}5x - 1$ in ein Koordinatensystem und berechne dann auf $0{,}1^\circ$ genau den Schnittwinkel φ der beiden Geraden.
   (Hinweis: Ermittle zuerst den Schnittwinkel der beiden Geraden mit der x-Achse!)

1. a) $G = \frac{1}{2}\cdot b\cdot h_D \quad \text{und} \quad h_D = \sqrt{a^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \sqrt{9-4}\ \text{cm} = \sqrt{5}\ \text{cm}$

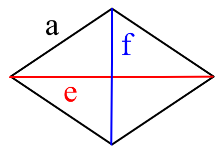


also $G = \frac{1}{2}\cdot b\cdot h_D = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot\sqrt{5}\ \text{cm}^2 = 2\cdot\sqrt{5}\ \text{cm}^2$

$V = G\cdot h = 2\cdot\sqrt{5}\ \text{cm}^2\cdot 5\text{cm} = 10\cdot\sqrt{5}\ \text{cm}^3 \approx 22{,}36\,\text{cm}^3$

$A = 2\cdot G + h\cdot(2a+b) = 4\cdot\sqrt{5}\ \text{cm}^2 + 5\text{cm}\cdot 10\text{cm} = \left(50 + 4\cdot\sqrt{5}\right)\text{cm}^2 \approx 58{,}94\,\text{cm}^2$

b) $G = 4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{e}{2}\cdot\frac{f}{2} = \frac{1}{2}\cdot e\cdot f = \frac{1}{2}\cdot 5\text{cm}\cdot 4\text{cm} = 10\text{cm}^2$



$V = G\cdot h = 10\,\text{cm}^2\cdot 6\text{cm} = 60\,\text{cm}^3$

$a = \sqrt{(\frac{1}{2}\cdot e)^2 + (\frac{1}{2}\cdot f)^2} = \sqrt{2{,}5^2 + 2^2}\ \text{cm} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{41}\ \text{cm} \approx 3{,}20\,\text{cm}$

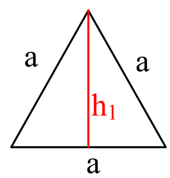
$A = 2\cdot G + h\cdot 4a = 20\text{cm}^2 + 6\text{cm}\cdot 2\cdot\sqrt{41}\ \text{cm} = \left(20 + 12\cdot\sqrt{41}\right)\text{cm}^2 \approx 96{,}84\,\text{cm}^2$

2. $V = G\cdot h \;\Rightarrow\; h = \frac{V}{G} = \frac{1020}{120}\ \text{cm} = 8{,}5\,\text{cm}$

$A = 2\cdot G + h\cdot u \;\Rightarrow\; u = \frac{A - 2\cdot G}{h} = \frac{682 - 2\cdot 120}{8{,}5}\text{cm} = 52\,\text{cm}$

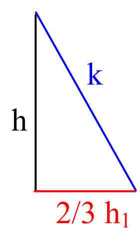
$u = 4\cdot a \;\Rightarrow\; a = \frac{1}{4}u = \frac{52}{4}\text{cm} = 13\,\text{cm}$

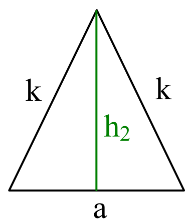
3. $h_1 = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot a = 2\cdot\sqrt{3}\,\text{cm} \quad \text{und} \quad G = \frac{1}{2}\cdot a\cdot h_1 = 4\cdot\sqrt{3}\,\text{cm}^2$



$V = \frac{1}{3}\cdot G\cdot h = \frac{1}{3}\cdot 4\sqrt{3}\,\text{cm}^2\cdot 5\text{cm} = \frac{20\cdot\sqrt{3}}{3}\text{cm}^3 \approx 11{,}55\,\text{cm}^3$

$k = \sqrt{(\frac{2}{3}\cdot h_1)^2 + h^2} = \sqrt{\frac{16}{3} + 25}\ \text{cm} = \frac{1}{3}\cdot\sqrt{273}\ \text{cm}$

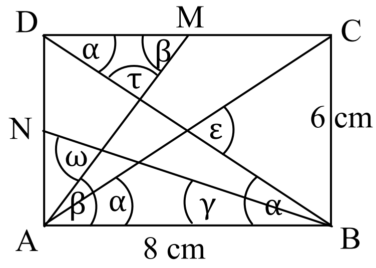




$h_2 = \sqrt{k^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{273}{9} - 4}\ \text{cm} = \frac{1}{3}\cdot\sqrt{237}\ \text{cm}$

$A = G + 3\cdot\frac{1}{2}\cdot a\cdot h_2 = 4\cdot\sqrt{3}\,\text{cm}^2 + \frac{3}{2}\cdot 4\cdot\frac{1}{3}\sqrt{237}\ \text{cm}^2 = \left(4\sqrt{3} + 2\sqrt{237}\right)\text{cm}^2 \approx 37{,}72\,\text{cm}^2$

4. a) $\tan\alpha = \frac{6}{8} \Rightarrow \alpha = \tan^{-1}(\frac{3}{4}) \approx 36{,}87^\circ,\ \varepsilon = 2\cdot\alpha \approx 73{,}74^\circ$



b) $\tan\beta = \frac{6}{4} \Rightarrow \beta = \tan^{-1}(\frac{3}{2}) \approx 56{,}31^\circ$,

$\tau = 180^\circ - \alpha - \beta \approx 86{,}82^\circ$

c) $\tan\gamma = \frac{3}{8} \Rightarrow \gamma = \tan^{-1}(\frac{3}{8}) \approx 20{,}56^\circ$, $\omega = \beta + \gamma \approx 76{,}87^\circ$

5. $\tan\alpha_1 = 0{,}5 \;\Rightarrow\; \alpha_1 \approx 26{,}57^\circ$; $\tan\alpha_2 = 1{,}5 \;\Rightarrow\; \alpha_1 \approx 56{,}31^\circ$; $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1 \approx 29{,}74^\circ$