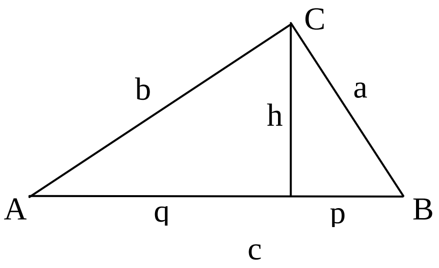
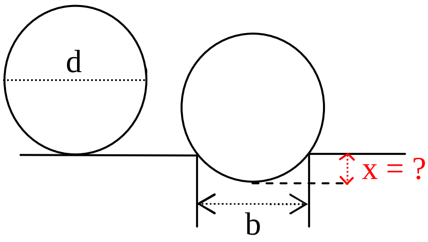
Mathematik-Intensivierung * Jahrgangsstufe 9 * Satzgruppe des Pythagoras

1. Das Bild zeigt ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit den üblichen Bezeichnungen.
   a) Formuliere die beiden Kathetensätze, den Höhensatz sowie den Satz von Pythagoras.
   b) Berechne alle weiteren Größen, wenn $b = 7cm$ und $h = 3cm$ gilt.
   Gib zunächst immer die exakten Längen an und runde gegebenenfalls auf mm genau.

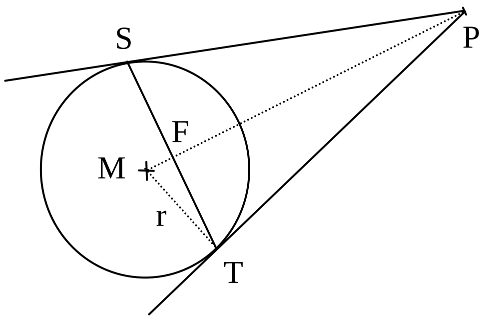


2. Konstruiere $\sqrt{15}$ mit Hilfe
   a) des Höhensatzes
   b) des Kathetensatzes
   c) des Satzes von Pythagoras.

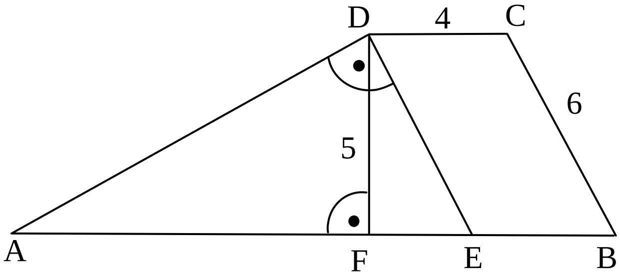
3. Eine Kugel mit dem Durchmesser $d = 10$ cm rollt in einen Spalt der Breite $b = 7{,}0$ cm.
   Wie tief sinkt die Kugel ein?
   Berechne x zunächst exakt und runde dann auf Millimeter genau.
   Für diese Aufgabe solltest Du die Mitternachtsformel bereits kennen.



4. An einen Kreis mit Mittelpunkt M und Radius $r = 4$ werden von einem Punkt P die zwei Tangenten gezogen.
   Es gilt $\overline{PM} = 10$.
   Die Tangenten berühren den Kreis in den Punkten S und T.
   Berechne $\overline{PT}$ und die Länge der Sehne [ST].



5. In einem Trapez ABCD mit $AB \parallel CD$ und $BC \parallel DE$ und $\sphericalangle ADE = 90°$ sind die Streckenlängen
   $\overline{CD} = 4$, $\overline{BC} = 6$ und $\overline{DF} = 5$
   bekannt. Hierbei ist F der Fußpunkt des Lotes von D auf [AB].



   a) Berechne den Umfang des Trapezes!
   b) Berechne den Flächeninhalt des Trapezes!

1. a) Kathetensätze: $a^2 = c \cdot p$ und $b^2 = c \cdot q$

   Höhensatz: $h^2 = p \cdot q$

   Satz von Pythagoras: $c^2 = a^2 + b^2$

   b) $q^2 + h^2 = b^2 \;\Rightarrow\; q = \sqrt{(7\text{cm})^2 - (3\text{cm})^2} = \sqrt{40\,\text{cm}^2} = 2\cdot\sqrt{10}\,\text{cm} \approx 6{,}3\,\text{cm}$

   $b^2 = c \cdot q \;\Rightarrow\; c = \dfrac{b^2}{q} = \dfrac{49\,\text{cm}^2}{2\cdot\sqrt{10}\,\text{cm}} = 2{,}45\cdot\sqrt{10}\,\text{cm} \approx 7{,}7\,\text{cm}$

   $p = c - q = 2{,}45\cdot\sqrt{10}\,\text{cm} - 2\cdot\sqrt{10}\,\text{cm} = 0{,}45\cdot\sqrt{10}\,\text{cm} \approx 1{,}4\,\text{cm}$

   $a^2 = c^2 - b^2 \;\Rightarrow\; a = \sqrt{60{,}025\,\text{cm}^2 - 49\,\text{cm}^2} = \sqrt{11{,}025\,\text{cm}^2} = \sqrt{\dfrac{4410}{400}}\,\text{cm} =$

   $= \dfrac{21}{20}\sqrt{10}\,\text{cm} = 1{,}05\sqrt{10}\,\text{cm} \approx 3{,}3\,\text{cm}$

2. a) $h^2 = p \cdot q$; hier $h^2 = \left(\sqrt{15}\right)^2 = 15 = 5\cdot 3 = p \cdot q$; zeichne rechtwinkliges Dreieck mit $p = 5$ und $q = 3$, dann gilt $h = \sqrt{15}$.

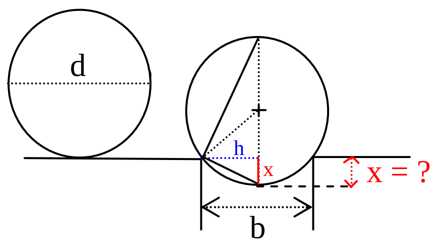
   b) $b^2 = c \cdot q$; hier $b^2 = \left(\sqrt{15}\right)^2 = 15 = 5\cdot 3 = c \cdot q$; zeichne rechtwinkliges Dreieck mit $c = 5$ und $q = 3$, dann gilt $b = \sqrt{15}$.

   c) $c^2 = a^2 + b^2$; hier $4^2 = 16 = 15+1 = \left(\sqrt{15}\right)^2 + 1^2$; zeichne rechtwinkliges Dreieck mit $c = 4$ und $b = 1$, dann gilt $a = \sqrt{15}$.

3. $h^2 = p \cdot q$; mit $p = x$ und $q = d - x = 10\text{cm} - x$

   und $h = \dfrac{1}{2}\cdot b = 3{,}5\,\text{cm}$ folgt:

   $(3{,}5\text{cm})^2 = x\cdot(10\text{cm} - x) \Leftrightarrow x^2 - 10\text{cm}\cdot x + 12{,}25\text{cm}^2 = 0$



   $x_{1/2} = \dfrac{1}{2}\cdot\left(10\text{cm} \pm \sqrt{(10\text{cm})^2 - 4\cdot 1\cdot 12{,}25\,\text{cm}^2}\right) = \dfrac{1}{2}\cdot\left(10\text{cm} \pm \sqrt{51\text{cm}^2}\right)$; da nur die positive Lösung sinnvoll ist, folgt $x = \dfrac{1}{2}\cdot\left(10\text{cm} + \sqrt{51}\,\text{cm}\right) = 8{,}5707...\text{cm} \approx 8{,}6\,\text{cm}$

4. $\sphericalangle PTM = 90^\circ$, d.h. $r^2 + \overline{PT}^2 = \overline{MP}^2 \;\Rightarrow$

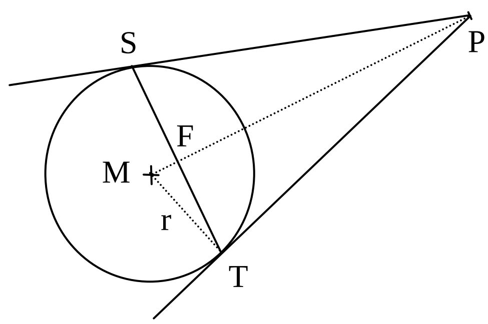
   $\overline{PT} = \sqrt{10^2 - 4^2} = \sqrt{84} = 2\cdot\sqrt{21} \approx 9{,}2$

   $ST \perp MP$ d.h. $\overline{MF}\cdot\overline{MP} = r^2$, also

   $\overline{MF}\cdot 10 = 4^2$ also $\overline{MF} = \dfrac{16}{10} = 1{,}6$

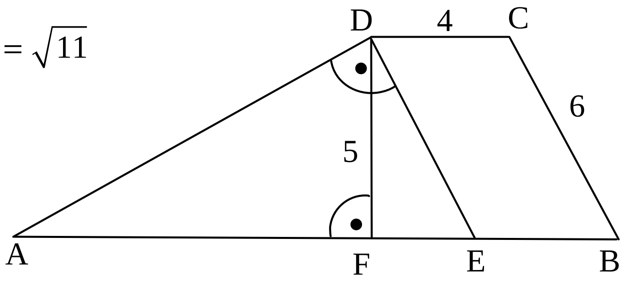
   $\overline{MF}^2 + \overline{FT}^2 = r^2 \;\Rightarrow\; \overline{FT} = \sqrt{r^2 - \overline{MF}^2}$ also

   $\overline{FT} = \sqrt{4^2 - 1{,}6^2} = \sqrt{13{,}44} = \sqrt{\dfrac{1344}{100}} = \dfrac{8\cdot\sqrt{21}}{10} = 0{,}8\sqrt{21} \approx 3{,}7$



5. DE || CB und AB || DC d.h. $\overline{DE} = \overline{CB} = 6$ und aus

$\overline{DF}^{\,2} + \overline{FE}^{\,2} = \overline{DE}^{\,2} \;\Rightarrow\; \overline{FE} = \sqrt{6^2 - 5^2} = \sqrt{11}$



$\overline{DE}^{\,2} = \overline{AE} \cdot \overline{EF} \;\Rightarrow$

$$\overline{AE} = \frac{6^2}{\sqrt{11}} = \frac{36}{11} \cdot \sqrt{11} \approx 10{,}9$$

$$\overline{AF} = \overline{AE} - \overline{EF} = \frac{36 \cdot \sqrt{11}}{11} - \sqrt{11} = \frac{25 \cdot \sqrt{11}}{11} \quad \text{und}$$

$$\overline{AF}^{\,2} + \overline{FD}^{\,2} = \overline{AD}^{\,2} \;\Rightarrow\; \overline{AD} = \sqrt{\frac{25^2}{11} + 5^2} = \sqrt{\frac{625 + 275}{11}} = \sqrt{\frac{900}{11}} = \frac{30\sqrt{11}}{11} \approx 9{,}0$$

a) Umfang U :

$$U = \overline{AE} + \overline{EB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} = \frac{36}{11} \cdot \sqrt{11} + 4 + 6 + 4 + \frac{30}{11} \cdot \sqrt{11} = 14 + 6\sqrt{11} \approx 33{,}9$$

b) Flächeninhalt A:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \left(\overline{AB} + \overline{DC}\right) \cdot \overline{DF} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{36\sqrt{11}}{11} + 4 + 4\right) \cdot 5 = \frac{90\sqrt{11}}{11} + 20 = \frac{220 + 90\sqrt{11}}{11} \approx 47{,}1$$