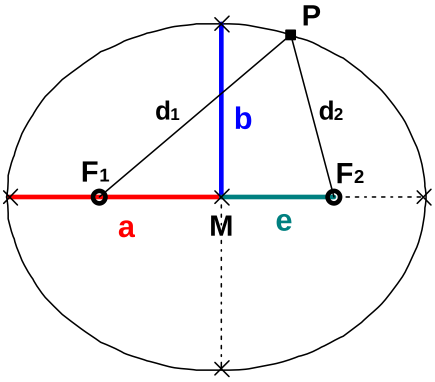
Physik * Jahrgangsstufe 10 * Aufgaben zu den keplerschen Gesetzen

Mathematisches Wissen zur Ellipse:
große Halbachse a , kleine Halbachse b ,
lineare Exzentrizität e ,
numerische Exzentrizität ε
Mittelpunkt M , Brennpunkte F_1 und F_2



Es gilt:

$d_1 + d_2 = 2a$ für jeden Punkt P der Ellipse
$a^2 = b^2 + e^2$ und $e = \varepsilon \cdot a$

Astronomische Daten, die bei den folgenden Berechnungen verwendet werden dürfen:
Große Halbachse Sonne-Erde: 1 astronomische Einheit = 1 AE = $149{,}6 \cdot 10^6$ km
Numerische Exzentrizität der Erdbahn: $\varepsilon = 0{,}017$
Mittlerer Erdradius: 6370 km
Erdmond: Umlaufdauer um die Erde: 27,1 Tage; mittlerer Abstand zur Erde: 384 000 km

Aufgaben:

1. a) Um wie viele Kilometer ändert sich der Abstand der Erde von der Sonne während des jährlichen Umlaufs?
   b) Der Sonnendurchmesser erscheint von der Erde aus unter einem Winkel von etwa $0{,}53^\circ$. Wie groß ist der Radius der Sonnenkugel?

2. Die Umlaufszeit der internationalen Raumstation ISS um die Erde beträgt etwa 91 min. In welcher Höhe über der Erdoberfläche etwa bewegt sich die Raumstation? Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich die Raumstation relativ zur Erde?

3. Ein NAVSTAR-Satellit des GPS umkreist die Erde in einer Höhe von 20183 km. Bestimmen Sie die Umlaufzeit dieses Satelliten.

4. In welcher Höhe über der Erde muss sich ein Fernsehsatellit wie z.B. Astra 1L befinden? Beachten Sie, dass sich der Satellit für einen Beobachter von der Erde aus immer an der gleichen Stelle befinden muss. Man spricht von einem so genannten *geostationären Satellit*.

5. Seit mehr als 2000 Jahren beobachtet man den regelmäßig wiederkehrenden Halleyschen Kometen. Im Jahr 1986 durchlief er den Perihel seiner Bahn und hatte dabei einen Abstand von 90 Millionen Kilometern. Erst im Jahr 2062 wird er wieder diesen sonnennächsten Punkt seiner Umlaufbahn erreichen.
   a) Bestimmen Sie die große Halbachse seiner Umlaufbahn in Vielfachen der AE.
   b) Bestimmen Sie den größten Abstand des Kometen von der Sonne im Aphel.
   c) Für Experten:
   Schätzen Sie ab, um wie viel Prozent sich die Geschwindigkeit des Kometen bei seinem Weg vom Aphel zum Perihel vergrößert.

6. Der Planet Mars benötigt für einen Umlauf um die Sonne 1,88 Jahre.
   a) Bestimmen Sie ungefähr die maximale und die minimale Entfernung von Erde und Mars.
   b) Wenn sich Erde und Mars besonders nahe kommen, dann kann man den Mars besonders gut beobachten (man sagt Mars befindet sich in *Opposition*). Begründen Sie das!
   c) Begründen Sie, warum die Zeitdauer zwischen zwei Oppositionen des Mars nicht mit der Umlaufdauer von 1,88 Jahren übereinstimmt.

Physik * Jahrgangsstufe 10 * Aufgaben zu den keplerschen Gesetzen * Lösungen

1. a) maximaler Abstand d_{max} :

$$d_{max} = a + e = (1+\varepsilon)\cdot a = 1{,}017\cdot 1AE = 1{,}017\cdot 149{,}6\cdot 10^6 km = 152{,}1\cdot 10^6 km$$

minimaler Abstand d_{min} :

$$d_{min} = a - e = (1-\varepsilon)\cdot a = 0{,}983\cdot 1AE = 0{,}983\cdot 149{,}6\cdot 10^6 km = 147{,}1\cdot 10^6 km$$

$$\Delta d = d_{max} - d_{min} = 152{,}1\cdot 10^6 km - 147{,}1\cdot 10^6 km = 5{,}0\cdot 10^6 km$$

b) $\tan(\frac{\varphi}{2}) = \frac{r_S}{1AE} \Rightarrow d_{Sonne} = 2\cdot r_S = 2\cdot 1AE\cdot \tan(\frac{0{,}53^o}{2}) = 1{,}4\cdot 10^6 km$

2. $\frac{a_{ISS}{}^3}{T_{ISS}{}^2} = \frac{a_{Mond}{}^3}{T_{Mond}{}^2} \Rightarrow a_{ISS} = \sqrt[3]{\frac{T_{ISS}{}^2}{T_{Mond}{}^2}}\cdot a_{Mond} = \sqrt[3]{\left(\frac{91 min}{27{,}1\cdot 24\cdot 60 min}\right)^2}\cdot 384000km = 6753 km$

$h_{ISS} = a_{ISS} - R_{Erde} = 6753km - 6370km = 383 km$

$v_{ISS} = \frac{2\cdot\pi\cdot a_{ISS}}{91 min} = \frac{2\cdot\pi\cdot 6753 km\cdot 60}{91h} = 28\cdot 10^3 \frac{km}{h}$

3. $a_{Sat} = R_{Erde} + h_{Sat} = 6370 km + 20183 km = 26553 km$; aus $\frac{a_{Sat}{}^3}{T_{Sat}{}^2} = \frac{a_{Mond}{}^3}{T_{Mond}{}^2} \Rightarrow$

$T_{Sat} = T_{Mond}\cdot\sqrt{\frac{a_{Sat}{}^3}{a_{Mond}{}^3}} = 27{,}1\cdot 24 h\cdot\sqrt{\left(\frac{26553 km}{384000 km}\right)^3} = 11{,}8 h$

4. Für einen geostationären Satelliten muss die Umlaufdauer genau 24 Stunden betragen.

aus $\frac{a_{Sat}{}^3}{T_{Sat}{}^2} = \frac{a_{Mond}{}^3}{T_{Mond}{}^2} \Rightarrow a_{Sat} = a_{Mond}\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{T_{Sat}}{T_{Mond}}\right)^2} = 384000 km\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{1{,}0 d}{27{,}1d}\right)^2} = 42{,}6\cdot 10^3 km$

$a_{Sat} = R_{Erde} + h_{Sat} \Rightarrow h_{Sat} = a_{Sat} - R_{Erde} = 42{,}6\cdot 10^3 km - 6{,}37\cdot 10^3 km = 36{,}2\cdot 10^3 km$

5. Angaben: $T_H = 2062 a - 1986 a = 76 a$ und $a_H - e_H = 90\cdot 10^6 km$

a) $\frac{a_H{}^3}{T_H{}^2} = \frac{a_{Erde}{}^3}{T_{Erde}{}^2} \Rightarrow a_H = a_{Erde}\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{T_H}{T_{Erde}}\right)^2} = 1AE\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{76 a}{1{,}0a}\right)^2} = 18 AE$

b) aus $a_H - e_H = 90\cdot 10^6 km$ folgt damit

$e_H = a_H - 90\cdot 10^6 km = 18\cdot 150\cdot 10^6 km - 90\cdot 10^6 km = 2{,}61\cdot 10^9 km = 17{,}4 AE$

$d_{max,H} = d_{H,Aphel} = a + e = 18 AE + 17{,}4 AE = 35{,}4 AE = 5{,}31\cdot 10^9 km$

c) Nach dem Flächensatz gilt $d_A{}^2\cdot\Delta\varphi_A = d_P{}^2\cdot\Delta\varphi_P$ für genügend kleine Zeitintervalle <t.

Wegen $v \sim \frac{d\cdot\Delta\varphi}{\Delta t}$ folgt damit

$$\frac{v_P}{v_A} = \frac{d_P\cdot\Delta\varphi_P}{d_A\cdot\Delta\varphi_A} = \frac{d_P{}^2\cdot\Delta\varphi_P}{d_A{}^2\cdot\Delta\varphi_A}\cdot\frac{d_A}{d_P} = \frac{d_A}{d_P} = \frac{5{,}31\cdot 10^9 km}{90\cdot 10^6 km} = \frac{59}{1}$$

6. a) $\frac{a_M{}^3}{T_M{}^2} = \frac{a_{Erde}{}^3}{T_{Erde}{}^2} \Rightarrow a_M = a_{Erde}\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{T_M}{T_{Erde}}\right)^2} = 1AE\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{1{,}88 a}{1{,}0a}\right)^2} = 1{,}52 AE$

maximaler Abstand : 1,52 AE + 1,0 AE = 2,52 AE minimaler Abstand: 0,52 AE

b) Mars kann dann den ganzen Abend über beobachtet werden (und ist der Erde sehr nah).

c) Nach einem Jahr befindet sich die Erde wieder an der gleichen Stelle, während Mars etwas mehr als einen halben Umlauf geschafft hat. Nach einem weiteren Jahr hat die Erde den Mars deshalb noch nicht ganz eingeholt. Die Opposition wiederholt sich so etwa alle 2,1 Jahre.