Mathematik * Jahrgangsstufe 10 * Exponentielle Zu- und Abnahme

1. Hans eröffnet am 1. Januar ein Konto und zahlt darauf 500€ ein.
   Er erhält jährlich 2,5% Zinsen, die er am Ende des Jahres jeweils auf das Konto gutschreiben lässt.
   a) Wie lautet der Kontostand nach 1, 2, 5, 10 Jahren?
   b) Wie lange müsste Hans warten, damit sich sein Anfangskapital von 500€ verdoppelt (bzw. verzehnfacht) hat?

2. Bakterien vermehren sich durch Teilung, wobei sich eine Bakterie durchschnittlich alle 10 Minuten teilt. Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei genau eine Bakterie vorhanden.
   a) Wie viele Bakterien sind dann nach 1 Stunde, 2 Stunden, 6 Stunden, 12 Stunden bzw. 24 Stunden vorhanden?
   b) Finden Sie eine Formel für die Anzahl $N = N(t)$ der Bakterien nach der Zeit t.
   c) Eine Bakterie hat ein Volumen von ca. $2\cdot 10^{-18}\,m^3$.
   Wie lange dauert es, bis die Bakterienkultur ein Volumen von $1m^3$ bzw. $1km^3$ einnimmt? Beurteilen Sie Ihr Ergebnis kritisch.

3. Ein Taucher interessiert sich wegen Unterwasseraufnahmen dafür, welche Helligkeit in verschiedenen Tiefen herrscht. Messungen in einem bestimmten (recht trüben) See ergeben, dass die Helligkeit pro Meter Wassertiefe um ca. 17% abnimmt.
   a) Wie groß ist die Helligkeit in 1m, 2m, 5m bzw. 10m Tiefe, verglichen mit der Helligkeit an der Wasseroberfläche?
   b) Beschreiben Sie die Helligkeit H als Funktion der Wassertiefe x als Bruchteil der Helligkeit H_o an der Wasseroberfläche.
   c) In welcher Tiefe beträgt die Helligkeit weniger als $0{,}01\cdot H_o$?

4. Beim Reaktorunglück von Tschernobyl wurde eine Menge von etwa 400g radioaktives Jod 131 freigesetzt. Dieses Jod 131 hat eine so genannte Halbwertszeit von 8,0 Tagen, d.h. in jeweils 8,0 Tagen halbiert sich die Menge des noch vorhanden radioaktiven Materials Jod 131.
   a) Wie kann man die Menge $M = M(t)$ des radioaktiven Jod 131 als Funktion der Zeit t angeben?
   b) Welcher Prozentsatz der ursprünglich vorhandenen Menge $M_o = 400g$ war nach einem Tag bzw. nach 30 Tagen noch vorhanden?
   c) Wie lange musste man etwa warten, bis von den 400g Jod 131 nur noch 1 Milligramm vorhanden war?

5. Die folgenden Tabellen beschreiben lineares oder exponentielles Wachstum.
   Finden Sie heraus, um welche Art an Wachstum es sich handelt.
   Versuchen Sie eine passende Funktionsvorschrift zu finden und ergänzen Sie fehlende Werte in der Tabelle.

a)

x	0	1	2	3	4	10	20
f(x)	4	10	25	62,5	?	?	?

b)

x	0	1	2	3	4	10	20
g(x)	28	23,5	19	14,5	?	?	?

c)

x	0	1	2	3	4	10	20
h(x)	120	96	76,8	61,44	?	?	?

Mathematik * Jahrgangsstufe 10 * Exponentielle Zu- und Abnahme * Lösungen

1. a) $K(t) = K_o \cdot 1{,}025^{\frac{t}{1a}}$ also $K(1a) = 500€ \cdot 1{,}025^1 = 512{,}50\,€$; $K(2a) = 500€ \cdot 1{,}025^2 \approx 525{,}31\,€$;
$K(5a) = 500€ \cdot 1{,}025^5 \approx 565{,}70\,€$; $K(10a) = 500€ \cdot 1{,}025^{10} \approx 640{,}04\,€$

b) $K(t) = 2 \cdot K_o \Leftrightarrow 2K_o = K_o \cdot 1{,}025^{t/1a} \Leftrightarrow 2 = 1{,}025^{t/1a} \Leftrightarrow \frac{t}{1a} = \log_{1{,}025} 2 \Leftrightarrow t \approx 28{,}1a$

$K(t) = 10 \cdot K_o \Leftrightarrow 10K_o = K_o \cdot 1{,}025^{t/1a} \Leftrightarrow 10 = 1{,}025^{t/1a} \Leftrightarrow \frac{t}{1a} = \log_{1{,}025} 10 \Leftrightarrow t \approx 93{,}2\,a$

2. a) $N(1h) = N(6 \cdot 10\,min) = N_o \cdot 2^6 = 64\,N_o$; $N(2h) = N(12 \cdot 10\,min) = N_o \cdot 2^{12} = 4096\,N_o$
$N(6h) = N(36 \cdot 10\,min) = N_o \cdot 2^{36} \approx 6{,}87 \cdot 10^{10}\,N_o$;
$N(12h) = N(72 \cdot 10\,min) = N_o \cdot 2^{72} \approx 4{,}7 \cdot 10^{21}\,N_o$;
$N(24h) = N(144 \cdot 10\,min) = N_o \cdot 2^{144} \approx 2{,}2 \cdot 10^{43}\,N_o$

b) $N(t) = N_o \cdot 2^{\frac{t}{10\,min}}$ also z.B. $N(1h) = N_o \cdot 2^{\frac{60\,min}{10\,min}} = N_o \cdot 2^6 = 64 \cdot N_o$

c) $V_{Bakterien}(t) = V_o \cdot 2^{\frac{t}{10\,min}}$ mit $V_o = 2 \cdot 10^{-18}\,m^3$

$V(t_1) = 1m^3 \Leftrightarrow V_o \cdot 2^{\frac{t_1}{10\,min}} = 1m^3 \Leftrightarrow 1m^3 = 2 \cdot 10^{-18}\,m^3 \cdot 2^{\frac{t_1}{10\,min}} \Leftrightarrow \frac{1m^3}{2 \cdot 10^{-18}\,m^3} = 2^{\frac{t_1}{10\,min}}$

$\Leftrightarrow 5 \cdot 10^{17} = 2^{\frac{t_1}{10\,min}} \Leftrightarrow \frac{t_1}{10\,min} = \log_2(5 \cdot 10^{17}) \Leftrightarrow t_1 = 10\,min \cdot 58{,}79... \approx 98\,h$

$V(t_2) = 1km^3 \Leftrightarrow V_o \cdot 2^{\frac{t_2}{10\,min}} = 10^9 m^3 \Leftrightarrow \frac{10^9\,m^3}{2 \cdot 10^{-18}\,m^3} = 2^{\frac{t_2}{10\,min}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5 \cdot 10^{26} = 2^{\frac{t_2}{10\,min}} \Leftrightarrow \frac{t_2}{10\,min} = \log_2(5 \cdot 10^{26}) \Leftrightarrow t_2 = 10\,min \cdot 88{,}69... \approx 6\,d\,4\,h$

Schon aus „Platzmangel“ für die Bakterien wird das Wachstum nicht über längere Zeit exponentiell verlaufen!

3. a) $H(x) = H_o \cdot (1 - 17\%)^{\frac{x}{1m}} = H_o \cdot 0{,}83^{\frac{x}{1m}}$ (x entspricht der Tauchtiefe)

$H(1m) = H_o \cdot 0{,}83^{\frac{1m}{1m}} = 0{,}83\,H_o$; $H(2m) = H_o \cdot 0{,}83^2 \approx 0{,}69\,H_o$;
$H(5m) = H_o \cdot 0{,}83^5 \approx 0{,}39\,H_o$; $H(10m) = H_o \cdot 0{,}83^{10} \approx 0{,}16\,H_o$;

b) $H(x) = H_o \cdot (1 - 17\%)^{\frac{x}{1m}} = H_o \cdot 0{,}83^{\frac{x}{1m}}$ (x entspricht der Tauchtiefe)

c) $H(x_1) = 0{,}01H_o \Leftrightarrow 0{,}01H_o = H_o \cdot 0{,}83^{\frac{x_1}{1m}} \Leftrightarrow 0{,}01 = 0{,}83^{\frac{x_1}{1m}} \Leftrightarrow$

$\frac{x_1}{1m} = \log_{0{,}83} 0{,}01 \Leftrightarrow x_1 = 1m \cdot 24{,}7... \approx 25\,m$

4. a) $M(t) = M_o \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{8{,}0\,d}} = M_o \cdot 2^{-\frac{t}{8{,}0\,d}}$ mit $M_o = 400g$

b) $M(1d) = M_o \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1d}{8{,}0\,d}} = M_o \cdot 2^{-0{,}125} \approx 91{,}7\%\text{ von } M_o$

$M(30\,d) = M_o \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{30d}{8{,}0\,d}} = M_o \cdot 2^{-3{,}75} \approx 7{,}4\%\text{ von } M_o$

c) $1mg = M(t_1) \Leftrightarrow 0{,}001g = 400\,g \cdot 2^{-\frac{t_1}{8{,}0\,d}} \Leftrightarrow 2{,}5 \cdot 10^{-6} = 2^{-\frac{t_1}{8{,}0\,d}} \Leftrightarrow$

$-\frac{t_1}{8{,}0\ d} = \log_2 2{,}5 \cdot 10^{-6} \Leftrightarrow t_1 = -8{,}0\,d \cdot (-18{,}609...) \approx 149\,d$

5. a)

x	0	1	2	3	4	10	20
f(x)	4	10	25	62,5	156,25	≈ 38147	≈ $3{,}638 \cdot 10^8$

$f(x) = 4 \cdot 2{,}5^x$ exponentielles Wachstum

b)

x	0	1	2	3	4	10	20
g(x)	28	23,5	19	14,5	10	- 17	- 62

$g(x) = 28 - 4{,}5 \cdot x$ lineares (negatives) Wachstum

c)

x	0	1	2	3	4	10	20
h(x)	120	96	76,8	61,44	49,152	12,8849…	1,3835…

$h(x) = 120 \cdot 0{,}8^x = 120 \cdot 1{,}25^{-x}$ exponentielles (negatives) Wachstum