

Mathematik * Jahrgangsstufe 10 * Aufgaben zur Polynomdivision

1. Führen Sie die Polynomdivision durch!

a) $(x^3 - 2x^2 + 3x - 6) : (x - 2)$

b) $(2x^4 - x^3 + 5x - 30) : (x + 2)$

c) $\frac{x^3 - 5x^2 + 4x + 6}{x - 3}$

d) $\frac{x^4 - 5x^2 - 500}{x + 5}$

2. Welchen Wert muss a haben, damit die Polynomdivision aufgeht?
Setzen Sie diesen Wert für a ein und führen Sie die Division durch!

a) $(x^3 + ax^2 + 2x - 3) : (x + 1)$

b) $(x^5 - 6x + a) : (x - 2)$

c) $\frac{x^4 - a}{x - 3}$

d) $\frac{x^3 + x^2 + ax - 6}{x + 2}$

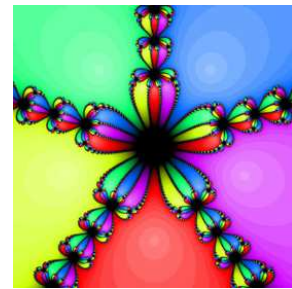
3. Bestimmen Sie alle Nullstellen der Funktion!

a) $f(x) = 0,5 \cdot x^4 - x^3 + x^2 - 2x$

b) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5$

c) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{27}{4}$

d) $f(x) = x^6 - 2x^4 - 8x^2 + 16$



4. Schneiden sich die Graphen der Funktion f und g ? Bestimmen Sie alle Schnittpunkte!

a) $f(x) = 3x^2 + 3$ und $g(x) = 2x^3 + 4x$

b) $f(x) = 4x^3 + 5x^2$ und $g(x) = 2x + 3$

c) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + 3x$ und $g(x) = x^3 + x$

5. Begründen Sie, dass die Polynomdivision $(x^3 - x^2 - 2x + 1) : (x - 2)$ nicht aufgehen kann.
Zeigen Sie, dass man den Quotienten folgendermaßen schreiben kann:

$$(x^3 - x^2 - 2x + 1) : (x - 2) = x^2 + x + \frac{1}{x - 2} \quad (\text{Polynomdivision mit Rest!})$$

6. Führen Sie die folgenden Polynomdivisionen mit Rest durch.

a) $(2x^3 - x^2 + 3x + 1) : (x + 1)$

b) $(x^4 - 2x) : (x + 5)$

Mathematik * Jahrgangsstufe 10 * Aufgaben zur Polynomdivision * Lösungen

1. a) $x^2 + 3$ b) $2x^3 - 5x^2 + 10x - 15$
 c) $x^2 - 2x - 2$ d) $x^3 - 5x^2 + 20x - 100$
2. a) $a = 6$; $x^2 + 5x - 3$ b) $a = -20$; $x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 10$
 c) $a = 81$; $x^3 + 3x^2 + 9x + 27$ d) $a = -5$; $x^2 - x - 3$
3. a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow 0,5 \cdot x^4 - x^3 + x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow 0,5 \cdot x \cdot (x^3 - 2x^2 + 2x - 4) = 0 \Leftrightarrow$
 $0,5 \cdot x \cdot (x^2 + 2) \cdot (x - 2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$; $x_2 = 2$
- b) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 5x + 5) \cdot (x + 1) = 0 \Leftrightarrow$
 $x_1 = 0$; $x_{2/3} = \frac{1}{2} \cdot (5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 5}) = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$
- c) $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{27}{4} = 0 \Leftrightarrow 12 \cdot (4x^3 - 24x^2 + 9x + 81) = 0 \Leftrightarrow$
 $12 \cdot (4x^2 - 12x - 27) \cdot (x - 3) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 3$; $x_{2/3} = \frac{1}{2 \cdot 4} \cdot (12 \pm \sqrt{144 + 4 \cdot 4 \cdot 27}) \Leftrightarrow$
 $x_1 = 3$; $x_{2/3} = \frac{12 \pm 24}{8}$ also $x_2 = 4,5$, $x_3 = -1,5$
- d) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^6 - 2x^4 - 8x^2 + 16 = 0 \Leftrightarrow u^3 - 2u^2 - 8u + 16 = 0$ (*Subst.: $u = x^2$*) \Leftrightarrow
 $(u^2 - 8) \cdot (u - 2) = 0 \Leftrightarrow u_1 = 2$; $u_{2/3} = \pm 2\sqrt{2}$ also $x^2 = 2$ oder $x^2 = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow$
 $x_{1/2} = \pm \sqrt{2}$; $x_{3/4} = \pm \sqrt{2\sqrt{2}} = \pm \sqrt[4]{8}$
4. a) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 3x^2 + 3 = 2x^3 + 4x \Leftrightarrow 0 = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow$
 $0 = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow 0 = (2x^2 - x + 3) \cdot (x - 1) \Leftrightarrow x_1 = 1$ Schnittpunkt (1;6)
- b) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 4x^3 + 5x^2 = 2x + 3 \Leftrightarrow 4x^3 + 5x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow$
 $(4x^2 + x - 3) \cdot (x + 1) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1$; $x_{2/3} = \frac{1}{2 \cdot 4} \cdot (-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 4 \cdot 3}) = \frac{-1 \pm 7}{8} \Leftrightarrow$
 $x_1 = -1 = x_3$; $x_2 = 0,75$; Schnittpunkte: (-1/1) und (0,75/4,5)
- c) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^4 + 3x = x^3 + x \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^4 - x^3 + 2x = 0 \Leftrightarrow$
 $\frac{1}{4} \cdot x \cdot (x^3 - 4x^2 + 8) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \cdot x \cdot (x^2 - 2x - 4) \cdot (x - 2) = 0 \Leftrightarrow$
 $x_1 = 0$; $x_2 = 2$; $x^2 - 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x_{3/4} = \frac{1}{2} \cdot (2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 4}) = 1 \pm \sqrt{5}$
 Schnittpunkte: (0/0) ; (2/10) ; (1 + $\sqrt{5}$ / 17 + 9 $\sqrt{5}$) ; (1 - $\sqrt{5}$ / 17 - 9 $\sqrt{5}$)
5. $x_1 = 2$ ist keine Nullstelle von $f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1$, deshalb geht die Division nicht auf!

6. a) $2x^2 - 3x + 6 - \frac{5}{x+1}$

b) $x^3 - 5x^2 + 25x - 127 + \frac{635}{x+5}$

