3. Schulaufgabe aus der Mathematik * Klasse 10d * 31.05.2011 * Gruppe A

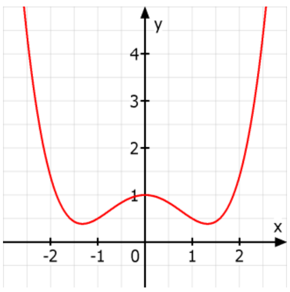
1. Zeigen Sie, dass die ganzrationale Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = x^3 - 5x^2 + 5x + 2$ die Nullstelle $x_1 = 2$ besitzt und berechnen Sie dann alle restlichen Nullstellen von f.

2. Eine ganzrationale Funktion g dritten Grades soll punktsymmetrisch zum Ursprung sein und die Nullstelle $x_1 = 2$ besitzen. Zusätzlich soll der Punkt P(1 / - 1,5) zum Graph von g gehören. Bestimmen Sie den Funktionsterm von g.

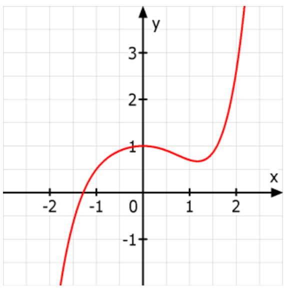
3. Gegeben ist die Funktion h mit $h(x) = 0,2\,x^2 \cdot (1-x) \cdot (x+3)$.
   Geben Sie alle Nullstellen von h an und prüfen Sie das Verhalten von h(x) für $x \to +\infty$.
   Skizzieren Sie dann qualitativ den Graphen von h.

4. Der Funktionsterm $f(x) = a \cdot x^4 - 2x^3 - x^2 + 1$ enthält einen <u>positiven</u> Parameter a.
   Unten sind 4 Graphen ganzrationaler Zahlen gezeigt. Begründen Sie jeweils kurz, warum offensichtlich keiner der abgebildeten Graphen zur Funktion f gehören kann!

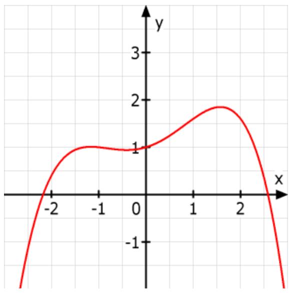
A



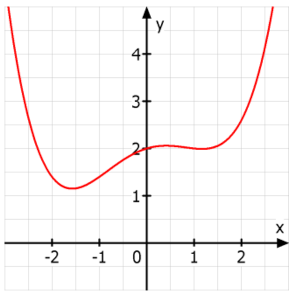
B



C



D



5. Jedes neunte Überraschungsei einer bekannten Firma enthält eine Figur.
   a) Peter möchte mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90% wenigstens eine dieser Figuren bekommen. Wie viele Überraschungseier muss Peter dann mindestens kaufen?

   Peter kann durch Schütteln eines Überraschungseis ziemlich gut erkennen, ob eine Figur enthalten ist. Enthält ein Ei eine Figur, so erkennt Peter dies in 80% der Fälle. Befindet sich dagegen keine Figur im Ei, so vermutet Peter in 15% dieser Fälle trotzdem eine Figur im Ei.

   b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sich eine Figur im Ei, wenn Peter aufgrund des Schüttelns eine Figur darin erwartet?
   Erstellen Sie dazu ein geeignetes Baumdiagramm!

Aufgabe	1	2	3	4	5a	b	Summe
Punkte	6	4	4	4	4	6	28

Gutes Gelingen! G.R.

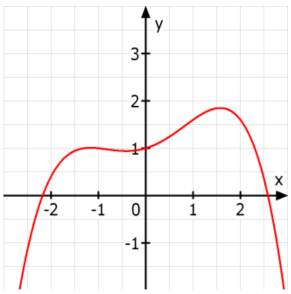
3. Schulaufgabe aus der Mathematik * Klasse 10d * 31.05.2011 * Gruppe B

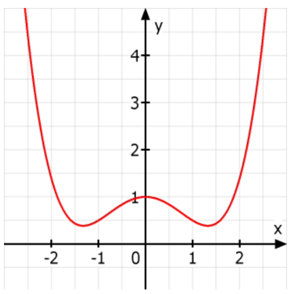
1. Zeigen Sie, dass die ganzrationale Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = x^3 - 4x^2 + 2x + 3$ die Nullstelle $x_1 = 3$ besitzt und berechnen Sie dann alle restlichen Nullstellen von f.

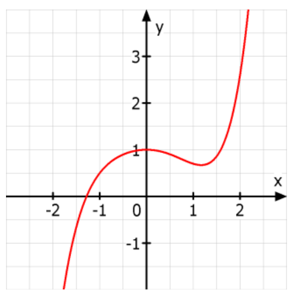
2. Eine ganzrationale Funktion g dritten Grades soll punktsymmetrisch zum Ursprung sein und die Nullstelle $x_1 = 2$ besitzen. Zusätzlich soll der Punkt P(1 / 4,5) zum Graph von g gehören. Bestimmen Sie den Funktionsterm von g.

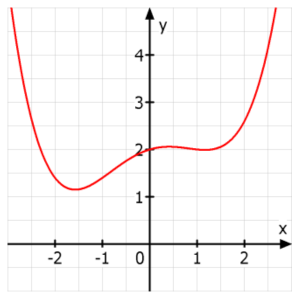
3. Gegeben ist die Funktion h mit $h(x) = 0{,}2x^2 \cdot (3 - x) \cdot (x + 1)$.
   Geben Sie alle Nullstellen von h an und prüfen Sie das Verhalten von h(x) für $x \to +\infty$.
   Skizzieren Sie dann qualitativ den Graphen von h.

4. Der Funktionsterm $f(x) = a \cdot x^4 - 2x^3 - x^2 + 1$ enthält einen positiven Parameter a.
   Unten sind 4 Graphen ganzrationaler Zahlen gezeigt. Begründen Sie jeweils kurz, warum offensichtlich keiner der abgebildeten Graphen zur Funktion f gehören kann!

A


B


C


D


5. Jedes siebte Überraschungsei einer bekannten Firma enthält eine Figur.
   a) Anna möchte mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90% wenigstens eine dieser Figuren bekommen. Wie viele Überraschungseier muss Anna dann mindestens kaufen?

   Anna kann durch Schütteln eines Überraschungseis ziemlich gut erkennen, ob eine Figur enthalten ist. Enthält ein Ei eine Figur, so erkennt Anna dies in 85% der Fälle. Befindet sich dagegen keine Figur im Ei, so vermutet Anna in 20% dieser Fälle trotzdem eine Figur im Ei.

   b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sich eine Figur im Ei, wenn Anna aufgrund des Schüttelns eine Figur darin erwartet?
   Erstellen Sie dazu ein geeignetes Baumdiagramm!

Aufgabe	1	2	3	4	5a	b	Summe
Punkte	6	4	4	4	4	6	28

Gutes Gelingen! G.R.

3. Schulaufgabe aus der Mathematik * Klasse 10d * 31.05.2011 * Gruppe A * Lösung

1. $f(2) = 2^3 - 5 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 + 2 = 8 - 20 + 10 + 2 = 0$
   also ist $x_1 = 2$ eine Nullstelle von f.

   $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 5x^2 + 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow$
   $(x-2)\cdot(x^2 - 3x - 1) = 0 \Leftrightarrow$
   $x_1 = 2$ oder $x^2 - 3x - 1 = 0 \Rightarrow$
   $x_{2/3} = \frac{1}{2}\cdot(+3 \pm \sqrt{9+4}) = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$

   Polynomdivision

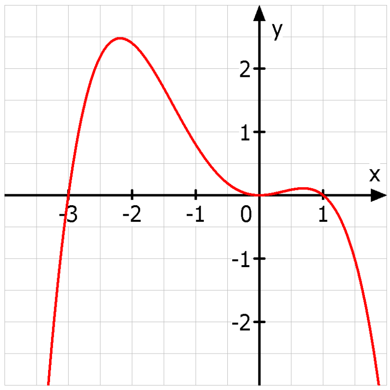
   $$\begin{array}{l}
   (x^3 - 5x^2 + 5x + 2) : (x-2) = x^2 - 3x - 1 \\
   \underline{-(x^3 - 2x^2)} \\
   \qquad -3x^2 + 5x + 2 \\
   \qquad \underline{-(3x^2 + 6x)} \\
   \qquad\qquad -x + 2 \\
   \qquad\qquad \underline{-(-x + 2)} \\
   \qquad\qquad\quad - \; -
   \end{array}$$

2. Ansatz: $g(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x$ und $g(2) = 0$ und $g(1) = -1{,}5$
   (1) $0 = 8a + 2b \Rightarrow b = -4a$
   (2) $-1{,}5 = a + b$ $\qquad -1{,}5 = a - 4a \Rightarrow a = 0{,}5$ und $b = -2$
   also $g(x) = 0{,}5x^3 - 2x$

3. $h(x) = 0{,}2x^2 \cdot (1-x)\cdot(x+3)$ hat die Nullstellen
   $x_1 = -3$, $x_2 = 0$ (doppelte NSt.) und $x_3 = 1$

   für $x \to +\infty$ gilt $h(x) \to "\infty^2 \cdot (-\infty)\cdot\infty" = -\infty$

   Der Graph von h geht bei x_1 und x_3 durch die x-Achse, bei x_2 dagegen wird die x-Achse vom Graphen nur berührt.



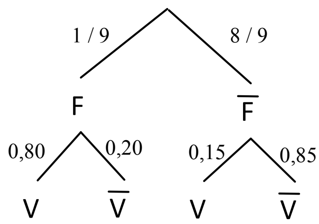
4. A Der gezeichnete Graph ist achsensymmetrisch, aber f(x) enthält $-2x^3$, ist also keine gerade Funktion.
   B Der abgebildete Graph gehört offensichtlich zu einer ganzrationalen Funktion mit ungeradem Grad, denn für $x \to \pm\infty$ gilt $f(x) \to \pm\infty$. Aber f hat den Grad 4.
   C Es müsste für $x \to \pm\infty$ gelten $f(x) \to +\infty$, denn a ist positiv.
   Beim abgebildeten Graphen aber gilt offensichtlich $f(x) \to -\infty$ für $x \to \pm\infty$.
   D Beim abgebildeten Graph gilt $f(0) = 2$, aber $f(0)$ müsste den Wert 1 haben.

5. a) $1 - (1-\frac{1}{9})^n \geq 90\% \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{8}{9}\right)^n \geq 0{,}90 \Leftrightarrow 0{,}10 \geq \left(\frac{8}{9}\right)^n \Leftrightarrow \lg 0{,}10 \geq \lg\left(\frac{8}{9}\right)^n \Leftrightarrow$

   $\lg 0{,}10 \geq n \cdot \lg\left(\frac{8}{9}\right) \Leftrightarrow \frac{\lg 0{,}10}{\lg\left(\frac{8}{9}\right)} \leq n \Leftrightarrow n \geq 19{,}5...$

   Peter muss also mindestens 20 Überraschungseier kaufen.

   b) F = „Figur enthalten“, V = „Figur vermutet“



   $$P_V(F) = \frac{P(V \cap F)}{P(V)} = \frac{\frac{1}{9}\cdot 0{,}80}{\frac{1}{9}\cdot 0{,}80 + \frac{8}{9}\cdot 0{,}15} = \frac{0{,}80}{0{,}80 + 8 \cdot 0{,}15} = 0{,}40$$

   Nur in 40% der Fälle, in denen Peter eine Figur im Ei vermutet, befindet sich tatsächlich eine Figur im Ei.

3. Schulaufgabe aus der Mathematik * Klasse 10d * 31.05.2011 * Gruppe B * Lösung

1. $f(3) = 3^3 - 4\cdot 3^2 + 2\cdot 3 + 3 = 27 - 36 + 6 + 3 = 0$
   also ist $x_1 = 3$ eine Nullstelle von f.

   $f(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x^3 - 4x^2 + 2x + 3 = 0 \;\Leftrightarrow$
   $(x-3)\cdot(x^2 - x - 1) = 0 \;\Leftrightarrow$
   $x_1 = 3$ oder $x^2 - x - 1 = 0 \;\Rightarrow$
   $x_{2/3} = \frac{1}{2}\cdot(+1 \pm \sqrt{1+4}\,) = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

   Polynomdivision

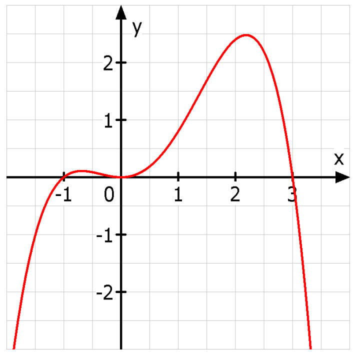
   $(x^3 - 4x^2 + 2x + 3) : (x-3) = x^2 - x - 1$
   $\underline{-(x^3 - 3x^2)}$
   $\quad -x^2 + 2x + 3$
   $\quad \underline{-(-x^2 + 3x)}$
   $\qquad -x + 3$
   $\qquad \underline{-(-x + 3)}$
   $\qquad -\;\;-$

2. Ansatz: $g(x) = a\cdot x^3 + b\cdot x$ und $g(2) = 0$ und $g(1) = 4{,}5$
   (1) $\quad 0 = 8a + 2b \;\Rightarrow\; b = -4a$
   (2) $\quad 4{,}5 = a + b \qquad 4{,}5 = a - 4a \;\Rightarrow\; a = -1{,}5$ und $b = 6$
   also $\quad g(x) = -1{,}5x^3 + 6x$

3. $h(x) = 0{,}2x^2\cdot(3-x)\cdot(x+1)$ hat die Nullstellen
   $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ (doppelte NSt.) und $x_3 = 3$

   für $x \to +\infty$ gilt $h(x) \to "\infty^2\cdot(-\infty)\cdot\infty" = -\infty$

   Der Graph von h geht bei x_1 und x_3 durch die x-Achse, bei x_2 dagegen wird die x-Achse vom Graphen nur berührt.



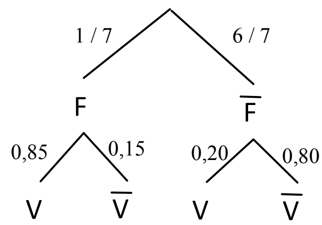
4. A Es müsste für $x \to \pm\infty$ gelten $f(x) \to +\infty$, denn a ist positiv.
   Beim abgebildeten Graphen aber gilt offensichtlich $f(x) \to -\infty$ für $x \to \pm\infty$.
   B Der gezeichnete Graph ist achsensymmetrisch, aber f(x) enthält $-2x^3$, ist also keine gerade Funktion.
   C Der abgebildete Graph gehört offensichtlich zu einer ganzrationalen Funktion mit ungeradem Grad, denn für $x \to \pm\infty$ gilt $f(x) \to \pm\infty$. Aber f hat den Grad 4.
   D Beim abgebildeten Graph gilt f(0) = 2, aber f(0) müsste den Wert 1 haben.

5. a) $1 - (1-\frac{1}{7})^n \geq 90\% \;\Leftrightarrow\; 1 - \left(\frac{6}{7}\right)^n \geq 0{,}90 \;\Leftrightarrow\; 0{,}10 \geq \left(\frac{6}{7}\right)^n \;\Leftrightarrow\; \lg 0{,}10 \geq \lg\left(\frac{6}{7}\right)^n \;\Leftrightarrow$

   $\lg 0{,}10 \geq n\cdot\lg\left(\frac{6}{7}\right) \;\Leftrightarrow\; \frac{\lg 0{,}10}{\lg\left(\frac{6}{7}\right)} \leq n \;\Leftrightarrow\; n \geq 14{,}9\ldots$

   Anna muss also mindestens 15 Überraschungseier kaufen.

   b) F = „Figur enthalten“, V = „Figur vermutet“



   $$P_V(F) = \frac{P(V\cap F)}{P(V)} = \frac{\frac{1}{7}\cdot 0{,}85}{\frac{1}{7}\cdot 0{,}85 + \frac{6}{7}\cdot 0{,}20} = \frac{0{,}85}{0{,}85 + 6\cdot 0{,}20} \approx 0{,}41$$

   Nur in etwa 41% der Fälle, in denen Anna eine Figur im Ei vermutet, befindet sich tatsächlich eine Figur im Ei.