Mathematik * Jahrgangsstufe 10 * Aufgaben zu rationalen Funktionen

Ganzrationale Funktionen

1. Finden Sie möglichst viele Eigenschaften der Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = x^3 - x^2 - 6x$ heraus. Hat der Graph Hoch- bzw. Tiefpunkte?
   Skizzieren Sie den Graphen!

2. Gesucht ist eine möglichst einfache Polynomfunktion mit der Nullstelle $x_1 = 1$ und den Punkten (0/4), (-1/2) und (2/-7) auf dem Graphen. Ermitteln Sie weitere Nullstellen der Funktion.
   Hat der Graph Hoch- bzw. Tiefpunkte. Skizzieren Sie den Graphen!

Gebrochenrationale Funktionen

3. Finden Sie möglichst viele Eigenschaften der Funktionen mit dem Funktionsterm
   $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$ heraus (Definitionsbereich, Nullstellen, Symmetrie, Grenzwertverhalten).
   Skizzieren Sie anschließend den Graphen.

4. Untersuchen Sie wie bei Aufgabe 3 die Funktion mit dem Funktionsterm
   $f(x) = \frac{5x}{x^2 + 4}$.
   Begründen Sie, ob der Graph von f Hoch-, bzw. Tiefpunkte besitzt.
   (Für Experten: Für welche Werte von a hat $f(x) = a$ genau eine Lösung?
   Bestimmen Sie daraus die genaue Lage des Hoch- und Tiefpunktes!)
   Skizzieren Sie anschließend den Graphen.

5. Untersuchen Sie wie bei Aufgabe 3 die Funktion mit dem Funktionsterm
   $f(x) = \frac{x^2 - 4}{5x}$.
   Zeigen Sie, dass sich der Graph von f für $x \to \pm\infty$ einer Geraden (einer so genannten Asymptote) „anschmiegt".
   Skizzieren Sie anschließend den Graphen.

Mathematik * Jahrgangsstufe 10 * Aufgaben zu rationalen Funktionen * Lösungen

1. $f(x) = x^3 - x^2 - 6x$

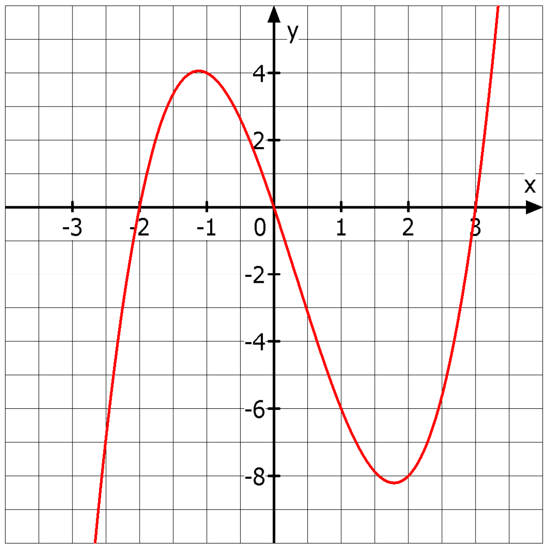
$f(x) = x \cdot (x^2 - x - 6) = x \cdot (x-3) \cdot (x+2)$

Nullstellen: $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, $x_3 = -2$

Für $x \to +\infty$ gilt $f(x) \to +\infty$

Für $x \to -\infty$ gilt $f(x) \to -\infty$

Im Bereich] -2 ; 0 [liegt ein HOP,
im Bereich] 0 ; 3 [ein TIP.
Die genaue Lage des Hoch- und Tiefpunktes kann nicht ermittelt werden.



2. Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

(1) $f(1) = 0$ (2) $f(0) = 4$

(3) $f(-1) = 2$ (4) $f(2) = -7$

liefert dann

$f(x) = 0{,}5x^3 - 3x^2 - 1{,}5x + 4$

Polynomdivision liefert

$f(x) = (x-1) \cdot (0{,}5x^2 - 2{,}5x - 4)$

Weitere Nullstellen aus

$0{,}5x^2 - 2{,}5x - 4 = 0$

$x_{2/3} = 2{,}5 \pm 0{,}5 \cdot \sqrt{57}$

$x_2 \approx 6{,}3$; $x_3 \approx -1{,}3$

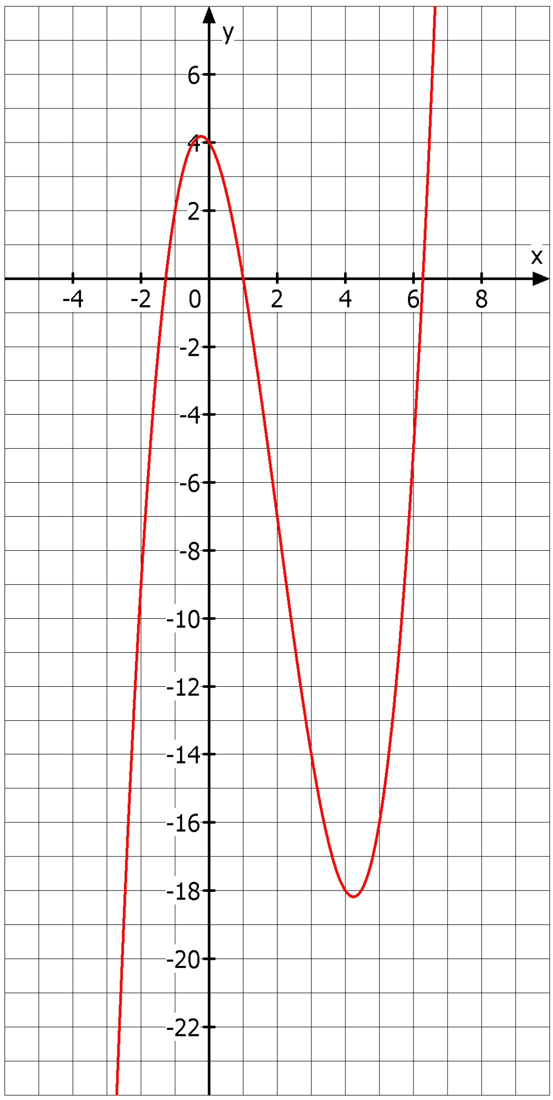
Für $x \to +\infty$ gilt $f(x) \to +\infty$, denn

$f(x) = x^3 \cdot (0{,}5 - \frac{3}{x} - \frac{1{,}5}{x^2} + \frac{4}{x^3}) \to$

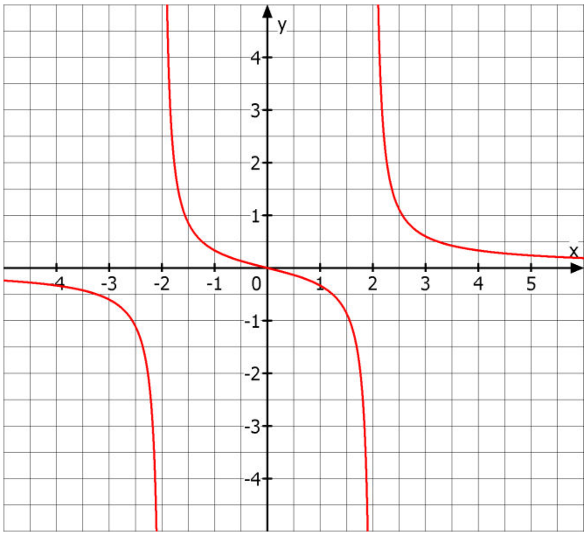
$"+\infty \cdot (0{,}5 - 0 - 0 + 0)" = +\infty$;

analog: für $x \to -\infty$ gilt $f(x) \to -\infty$

Zwischen den Nullstellen liegen ein HOP und ein TIP, deren genaue Lage aber nicht ermittelt werden kann.



3. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$



Nenner darf nicht 0 sein, daher $D_f = R \setminus \{-2;\, 2\}$.

Nullstelle: $x_1 = 0$

Punktsymmetrie zum Ursprung wegen f(-x) = - f(x)

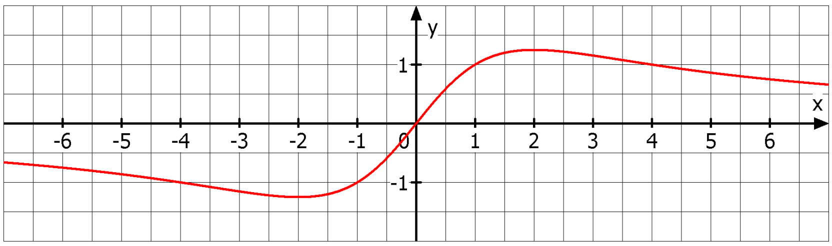
Für $x \to \pm\infty$ gilt

$$f(x) = f(x)\cdot\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{4}{x}} \to \frac{\pm 0}{1 \mp 0} = \pm 0 \;,$$

für $x \underset{<}{\overset{>}{\to}} 2$ gilt

$$f(x) = \frac{x}{(x-2)\cdot(x+2)} \to \text{"}\frac{2}{\pm 0\cdot 4}\text{"} = \pm\infty, \quad \text{für } x \underset{<}{\overset{>}{\to}} -2 \text{ gilt } f(x) \to \pm\infty$$

4. $f(x) = \dfrac{5x}{x^2 + 4}$, $D_f = R$



Nullstelle $x_1 = 0$

Punktsymmetrie zum Ursprung, denn f(-x) = - f(x) ;

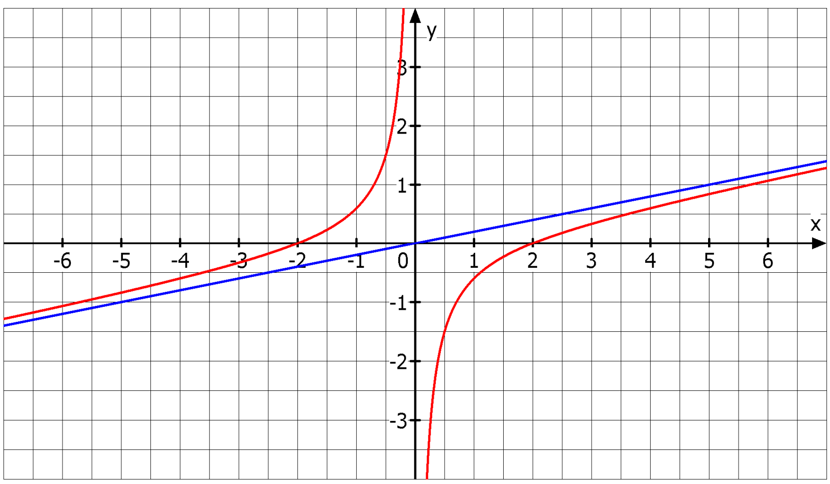
für $x \to \pm\infty$ gilt $f(x) \to \pm 0$;

im Bereich $x > 0$ muss ein HOP, im Bereich $x < 0$ ein TIP liegen.

$f(x) = a \;\Leftrightarrow\; ax^2 - 5x + 4a = 0$ hat genau eine Lösung für $D = 25 - 16a^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; a_{1/2} = \pm 1{,}25$.

Daher HOP(x_1/1,25) und aus $f(x_1) = 1{,}25$ folgt $x_1 = 2$, also HOP(2 /1,25) und TIP(-2 / -1,25).

5. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{5x}$;



$D_f = R \setminus \{0\}$

Nullstellen: $x_{1/2} = \pm 2$

Punktsymmetrie zum Ursprung wegen f(-x) = - f(x)

für $x \underset{<}{\overset{>}{\to}} 0$ gilt

$$f(x) \to \text{"}\frac{\pm 0 - 4}{\pm 0}\text{"} = \mp\infty$$

für $x \to \pm\infty$ gilt

$$f(x) = \frac{x^2}{5x} - \frac{4}{5x} = \frac{1}{5}x - \frac{4}{5x} \to \frac{1}{5}x - (\pm 0) = \frac{1}{5}x = 0{,}2\,x$$

D.h. der Graph von f schmiegt sich an die Gerade $y = 0{,}2\,x$ an.