# Q12 * Mathematikkurs 2m_1 * Klausur am 07.12.2010

1. Bestimmen Sie die beiden unbestimmten Integrale

   a) $\int 2 \cdot \sqrt{3x+4}\, dx$ b) $\int \frac{5x}{x^2+5}\, dx$

2. Das Bild 1 zeigt den Graphen der Funktion f mit $f(x) = 0{,}5 \cdot x^4 - x^3$.

   a) Begründen Sie mit geeigneter Rechnung, dass f einen Tiefpunkt und zwei Wendepunkte hat.

   b) Bestimmen Sie mit Rechnung die Gleichung der eingezeichneten Wendetangente und zeigen Sie, dass sich diese Wendetangente und $G_f$ in (-1/1,5) schneiden.
   Ermitteln Sie nun den von $G_f$ und dieser Wendetangente eingeschlossenen Flächeninhalt.

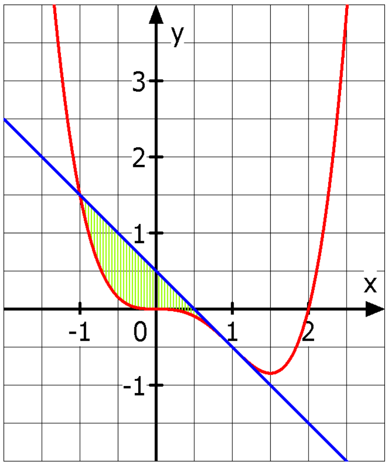


Bild 1

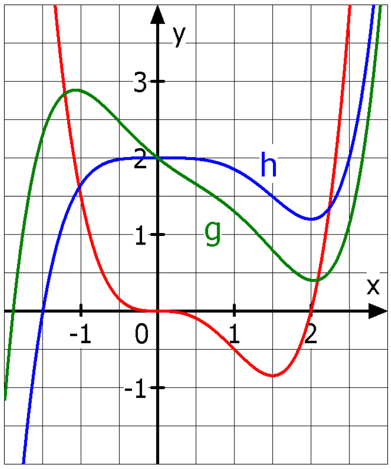


Bild 2

   Das Bild 2 zeigt den Graphen von f und zusätzlich zwei weitere Graphen $G_h$ und $G_g$.

   Eine dieser beiden Funktionen stellt die Integralfunktion $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ dar.

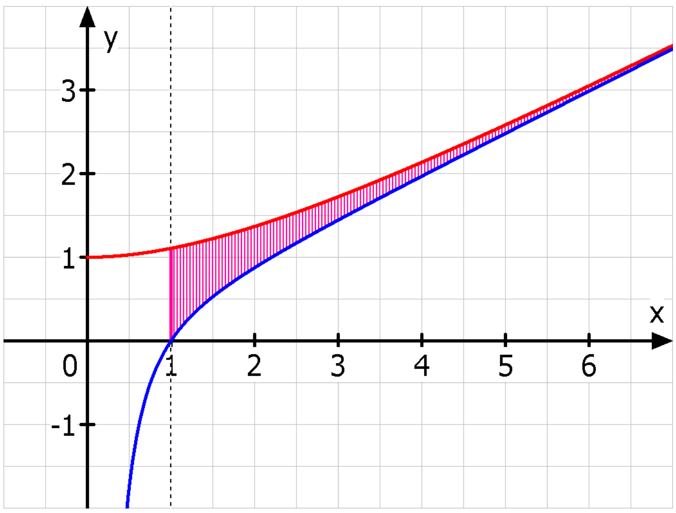
   c) Begründen Sie, welche der Funktionen h bzw. g nicht der Integralfunktion F entspricht.
   Geben Sie einen passenden Wert für die untere Grenze a der Integralfunktion an.

3. Das Diagramm zeigt die Graphen der beiden Funktionen f und g mit

   $f(x) = 0{,}5x + e^{-0{,}5x}$ und

   $g(x) = \frac{x^3 - 1}{2x^2}$ $[\ D_f = D_g = \mathbb{R}^+\ ]$ .

   Prüfen Sie, ob die sich ins Unendliche erstreckende, schraffierte Fläche zwischen den beiden Graphen und der Senkrechten x = 1 einen endlichen Flächeninhalt hat.
   Bestimmen Sie gegebenenfalls diesen Inhalt.




| Aufgabe | 1a | b | 2a | b | c | 3 | Summe |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Punkte | 3 | 3 | 6 | 6 | 3 | 6 | 27 |


Gutes Gelingen! G.R.

**Q12 * Mathematikkurs 2m_1 * Klausur am 07.12.2010 * Lösung**

1. a) $\int 2\cdot\sqrt{3x+4}\ dx = \int 2\cdot(3x+4)^{0,5}\ dx = 2\cdot\dfrac{(3x+4)^{1,5}}{1,5\cdot 3} + C = \dfrac{4}{9}\cdot(3x+4)^{1,5} + C$

   b) $\int \dfrac{5x}{x^2+5}\ dx = \int 5\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2x}{x^2+5}\ dx = \dfrac{5}{2}\cdot\ln\left|x^2+5\right| + C = \dfrac{5}{2}\cdot\ln\left(x^2+5\right) + C$

2. a) $f(x) = 0,5\cdot x^4 - x^3$ ; $f'(x) = 2x^3 - 3x^2$ ; $f''(x) = 6x^2 - 6x$

   $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2(2x-3) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$ (doppelte Nullstelle!) $x_2 = 1,5$

   $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$ ; $x_3 = 1$

   $f''(x)$ ändert bei $x_1$ und $x_3$ jeweils das Vorzeichen, d.h. es handelt sich um Wendestellen.
   Der Punkt (1/ – 0,5) ist also Wendepunkt, wegen $f'(x_1) = 0$ ist (0/0) sogar ein Terrassenpunkt.

   $f'(x_2) = 0$ und $f''(x_2) = 6\cdot 1,5\cdot(1,5-1) < 0 \Rightarrow (x_2 / y_2) = (1,5/-\dfrac{27}{32})$ ist Tiefpunkt.

   b) $y = f'(1)\cdot x + t$ ; $y = -x + t$ ; $(1/-0,5)$ eingesetzt: $-0,5 = -1 + t \Rightarrow t = 0,5$

   Wendetangente: $y = -x + 0,5$

   (-1/1,5) liegt auf der Wendetangente und auch auf $G_f$, denn es gilt
   $-\cdot(-1) + 0,5 = 1,5$ und $f(-1) = 0,5\cdot(-1)^4 - (-1)^3 = 1,5$

   Flächeninhalt A: $A = \int_{-1}^{1} -x + 0,5 - (0,5x^4 - x^3)\ dx = \int_{-1}^{1} -x + 0,5 - 0,5x^4 + x^3\ dx =$

   $A = \left[-\dfrac{x^2}{2} + 0,5x - \dfrac{0,5x^5}{5} + \dfrac{x^4}{4}\right]_{-1}^{+1} = -0,5 + 0,5 - 0,1 + 0,25 - (-0,5 - 0,5 + 0,1 + 0,25) = 0,8$

   c) Die Funktion g kann nicht die gesuchte Integralfunktion sein, denn diese muss an der Stelle $x_1 = 0$ einen Hochpunkt haben. f(x) ändert an dieser Stelle nämlich das Vorzeichen von + auf – .
   Da F an der Stelle a eine Nullstelle hat und h eine Nullstelle bei $x_4 = -1,5$ hat, passt für a der Wert $a = -1,5$ .

3. $f(x) = 0,5x + e^{-0,5x}$ und $g(x) = \dfrac{x^3 - 1}{2x^2} = 0,5x - \dfrac{1}{2x^2}$

   $A = \lim\limits_{b\to\infty}\int_1^b f(x) - g(x)\ dx = \lim\limits_{b\to\infty}\int_1^b 0,5x + e^{-0,5x} - (0,5x - \dfrac{1}{2x^2})\ dx =$

   $\lim\limits_{b\to\infty}\int_1^b e^{-0,5x} + \dfrac{1}{2}\cdot x^{-2}\ dx = \lim\limits_{b\to\infty}\left[-2\cdot e^{-0,5x} - \dfrac{x^{-1}}{2}\right]_1^b = \lim\limits_{b\to\infty}\dfrac{-2}{e^{0,5\cdot b}} - \dfrac{1}{2\cdot b} - (-\dfrac{2}{\sqrt{e}} - \dfrac{1}{2}) =$

   $"\dfrac{-2}{e^{\infty}} - \dfrac{1}{\infty} + \dfrac{2}{\sqrt{e}} + \dfrac{1}{2}" = \dfrac{2}{\sqrt{e}} + \dfrac{1}{2} \approx 1,71$