Q12 * Astrophysik * 2. Extemporale am 26.11.2010

Ein Satellit soll von einer kreisförmigen Umlaufbahn um die Erde auf einer Hohmannbahn zum Mond geschickt werden.
Der Satellit bewegt sich auf einer Kreisbahn in einer Höhe von 330 km über der Erdoberfläche.
Der Mond bewegt sich (für die Rechnung) auf einer kreisförmigen Bahn mit Radius $380 \cdot 10^3$ km in der Zeit von 27,3 d um die Erde.
Der Erdradius beträgt 6370 km, die Erdmasse $5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg.

a) Berechnen Sie Geschwindigkeit des Satelliten in seiner Umlaufbahn um die Erde.
[Ergebnis: $v_S = 7{,}7$ km/s]
b) Skizzieren Sie (nicht maßstäblich) die Hohmannbahn und ermitteln Sie deren große Halbachse.
[Ergebnis: $a = 193 \cdot 10^3$ km]
c) Um wie viele km/s muss die Geschwindigkeit des Satelliten erhöht werden, um ihn in die Hohmannbahn einzuschießen?
d) Wie lange dauert der Flug des Satelliten von der Erde zum Mond?

Angaben: $G = 6{,}673 \cdot 10^{-11} \dfrac{m^3}{kg \cdot s^2}$

Aufgabe	a	b	c	d	Summe
Punkte	4	3	4	4	15

Gutes Gelingen! G.R.

Q12 * Astrophysik * 2. Extemporale am 26.11.2010 * Lösung

a) $\frac{mv^2}{r} = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}$ mit $r = r_{Erde} + h = 6370\,km + 330\,km = 6700\,km$

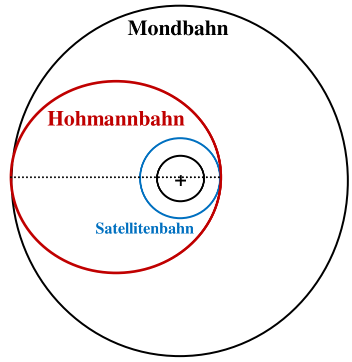
$$v^2 = \frac{G \cdot M}{r} \quad \Rightarrow \quad v_{Satellit} = v = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{m^3}{kg \cdot s^2} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\,kg}{6700 \cdot 10^3\,m}} = 7{,}72 \cdot 10^3\,\frac{m}{s}$$

b) Für die große Halbachse der Hohmannbahn gilt:

$2 \cdot a = r_{Mond} + r_{Satellit} \quad \Rightarrow$

$a = \frac{1}{2} \cdot (380 \cdot 10^3\,km + 6700\,km)$

$a = 193350\,km = 193 \cdot 10^3\,km$



c) Für die Startgeschwindigkeit v des Satelliten auf der Hohmannbahn gilt:

$$v = \sqrt{G \cdot M \cdot \left(\frac{2}{r_{Satellit}} - \frac{1}{a} \right)} =$$

$$\sqrt{6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{m^3}{kg \cdot s^2} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\,kg \cdot \left(\frac{2}{6700 \cdot 10^3\,m} - \frac{1}{193 \cdot 10^6\,m} \right)} = 10{,}8\,\frac{km}{s}$$

$$\Delta v = 10{,}8\,\frac{km}{s} - 7{,}7\,\frac{km}{s} = 3{,}1\,\frac{km}{s}$$

Der Satellit muss seine Geschwindigkeit um $3{,}1$ km/s erhöhen.

d) $T_{Flug} = \frac{1}{2} \cdot T_{Hohmann}$ und $\frac{{T_H}^2}{a^3} = \frac{{T_M}^2}{{r_M}^3} \quad \Rightarrow$

$$T_H = T_M \cdot \sqrt{\frac{a^3}{{r_M}^3}} = 27{,}3\,d \cdot \sqrt{\frac{193^3}{380^3}} = 9{,}88\,d \quad \text{also} \quad T_{Flug} = 4{,}94\,d$$