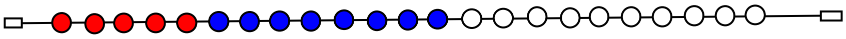
1. Klausur im 2. Kurshalbjahr des GK m2, K12, am 27.06.2006 * Gruppe A

1. Anna bastelt aus 5 roten, 8 blauen und 10 weißen Holzperlen ein Fußkettchen.
   Wie viele verschiedene Möglichkeiten für die Anordnung der Holzperlen gibt es?



2. Bernd wirft einen L-Würfel 4-mal. Mit welcher Wahrscheinlichkeit würfelt Bernd
   a) 4 verschiedene Zahlen?
   b) mindestens einmal eine „6“?
   c) genau zweimal eine „1“?
   d) beim ersten und letzten Wurf die gleiche Zahl?

3. Von den 96 Kollegiaten eines Abiturjahrgangs haben 8 Schüler die 7. Klasse und 6 Schüler die 9. Klasse wiederholt.
   Zwei Schüler (ein Mädchen und ein Junge) mussten dabei beide Klassen wiederholen.
   Die Anzahl der Mädchen dieses Abiturjahrgangs übertrifft die Anzahl der Jungen.
   a) Welcher Prozentsatz der Kollegiaten musste weder die 7. noch die 9. Klasse wiederholen?
   b) Ist das Wiederholen der 7. Klasse bzw. der 9. Klasse für diesen Abiturjahrgang stochastisch unabhängig voneinander?
   c) Die Schulleitung behauptet zu Recht, dass das Wiederholen der 9. Klasse stochastisch unabhängig vom Geschlecht der Schüler war.
      Zeigen Sie, dass es damit für die Anzahl der Schülerinnen dieses Abiturjahrgangs nur genau zwei Möglichkeiten gibt.

4. Auf den sechs Seitenflächen eines L-Würfels befinden sich die Ziffern 1, 1, 1, 2, 2, 3.
   Anna und Bernd würfeln abwechselnd, Anna beginnt.
   Der Spieler, der erstmals die Augenzahl des Gegners im vorangegangenen Versuch nicht übertrifft, hat verloren.
   Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt Bernd?
   Zeichnen Sie ein geeignetes Baumdiagramm.

5. Bei einer Impfung tritt mit einer Wahrscheinlichkeit von 5,0 % eine Impfreaktion auf.
   Es werden 100 Personen geimpft.
   a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt bei genau 5 Personen die Impfreaktion auf?
   b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt bei mehr als 8 Personen die Impfreaktion auf?
   c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt bei mindestens 5 aber bei weniger als 10 Personen eine Impfreaktion auf?

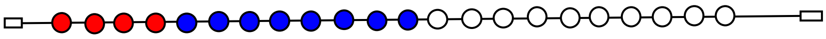
6. Wie oft muss Klaus einen L-Würfel werfen, wenn er mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99,9% mindestens eine „6“ erhalten will?

Aufgabe	1	2a	b	c	d	3a	b	c	4	5a	b	c	6	Σ
Punkte	3	3	3	3	3	3	3	3	9	2	3	3	6	47

Gutes Gelingen! G.R.

1. Klausur im 2. Kurshalbjahr des GK m2, K12, am 27.06.2006 * Gruppe B

1. Anna bastelt aus 4 roten, 8 blauen und 10 weißen Holzperlen ein Fußkettchen.
   Wie viele verschiedene Möglichkeiten für die Anordnung der Holzperlen gibt es?



2. Bernd wirft einen L-Würfel 5-mal. Mit welcher Wahrscheinlichkeit würfelt Bernd
   a) 5 verschiedene Zahlen?
   b) mindestens einmal eine „6“?
   c) genau zweimal eine „1“?
   d) beim ersten und letzten Wurf die gleiche Zahl?

3. Von den 96 Kollegiaten eines Abiturjahrgangs haben 6 Schüler die 7. Klasse und 8 Schüler die 9. Klasse wiederholt.
   Zwei Schüler (ein Mädchen und ein Junge) mussten dabei beide Klassen wiederholen.
   Die Anzahl der Mädchen dieses Abiturjahrgangs übertrifft die Anzahl der Jungen.
   a) Welcher Prozentsatz der Kollegiaten musste weder die 7. noch die 9. Klasse wiederholen?
   b) Ist das Wiederholen der 7. Klasse bzw. der 9. Klasse für diesen Abiturjahrgang stochastisch unabhängig voneinander?
   c) Die Schulleitung behauptet zu Recht, dass das Wiederholen der 7. Klasse stochastisch unabhängig vom Geschlecht der Schüler war.
      Zeigen Sie, dass es damit für die Anzahl der Schülerinnen dieses Abiturjahrgangs nur genau zwei Möglichkeiten gibt.

4. Auf den sechs Seitenflächen eines L-Würfels befinden sich die Ziffern 1, 2, 2, 3, 3, 3.
   Anna und Bernd würfeln abwechselnd, Anna beginnt.
   Der Spieler, der erstmals die Augenzahl des Gegners im vorangegangenen Versuch nicht übertrifft, hat verloren.
   Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt Bernd?
   Zeichnen Sie ein geeignetes Baumdiagramm.

5. Bei einer Impfung tritt mit einer Wahrscheinlichkeit von 4,0 % eine Impfreaktion auf.
   Es werden 100 Personen geimpft.
   a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt bei genau 4 Personen die Impfreaktion auf?
   b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt bei mehr als 6 Personen die Impfreaktion auf?
   c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt bei mindestens 4 aber bei weniger als 9 Personen eine Impfreaktion auf?

6. Wie oft muss Klaus einen L-Würfel werfen, wenn er mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99,5% mindestens eine „6“ erhalten will?

Aufgabe	1	2a	b	c	d	3a	b	c	4	5a	b	c	6	Σ
Punkte	3	3	3	3	3	3	3	3	9	2	3	3	6	47

Gutes Gelingen! G.R.

1. Klausur im 2. Kurshalbjahr des GK m2, K12, am 27.06.2006 * Gruppe A * Lösung

1. $\dfrac{(5+8+10)!}{5!\cdot 8!\cdot 10!} = \dfrac{23!}{5!\cdot 8!\cdot 10!} \approx 1{,}472\cdot 10^9$

2. $|\Omega| = 6^4 = 1296$

   a) $|A| = \binom{6}{4}\cdot 4! = 360$ d.h. $P(A) = \dfrac{360}{1296} = \dfrac{5}{18} \approx 27{,}8\%$

   b) $|B| = |\Omega| - 5^4 = 671$ d.h. $P(B) = \dfrac{671}{1296} \approx 51{,}8\%$

   c) $|C| = \binom{4}{2}\cdot 5^2 = 150$ d.h. $P(A) = \dfrac{150}{1296} = \dfrac{25}{216} \approx 11{,}6\%$

   d) $|D| = \binom{6}{1}\cdot 6^2 = 6^3 = 216$ d.h. $P(D) = \dfrac{216}{1296} = \dfrac{1}{6} \approx 16{,}7\%$

3. a) $\dfrac{84}{96} = 87{,}5\%$ mussten weder die 7. noch die 9. Klasse wiederholen.

	7. bestanden	7. wiederholt	
9. bestanden	84	6	90
9. wiederholt	4	2	6
	88	8	96

   b) Wiederholerwahrscheinlichkeiten:

   $p_7 = \dfrac{8}{96}$; $p_9 = \dfrac{6}{96}$; $p_{7 und 9} = \dfrac{2}{96}$ und $p_7\cdot p_9 = \dfrac{8}{96}\cdot\dfrac{6}{96} = \dfrac{1}{192} \neq p_{7 und 9} = \dfrac{2}{96}$,

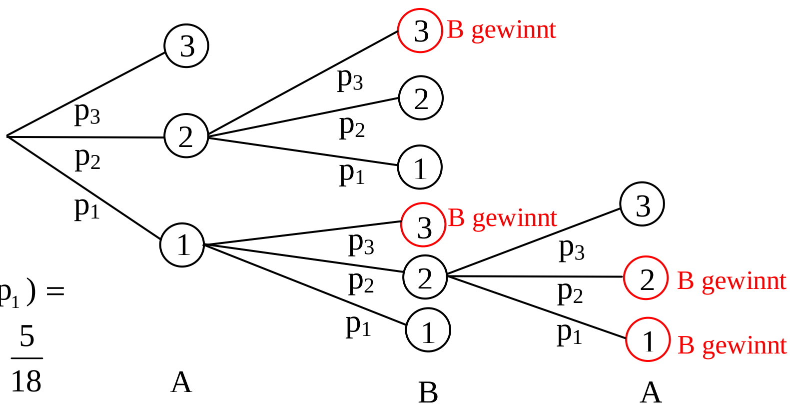
   d.h. das Wiederholen der 7. und 9. Klasse ist stochastisch abhängig voneinander.

   c) Für m = Anzahl der Mädchen und j = Anzahl der Jungen gilt:
   $m > j > 0$ und $m + j = 96$ und, weil die 6 Wiederholer der 9. Klasse im Verhältnis der Geschlechter aufgeteilt werden müssen $m : j = 4 : 2$ oder $m : j = 5 : 1$.

   Also gilt für m: $m = \dfrac{4}{6}\cdot 96 = 64$ oder $m = \dfrac{5}{6}\cdot 96 = 80$

4. $p(\text{"1"}) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$, $p(\text{"2"}) = \dfrac{1}{3}$

   und $p(\text{"3"}) = \dfrac{1}{6}$



   $p(\text{"B gewinnt"}) =$

   $p_2\cdot p_3 + p_1\cdot p_3 + p_1\cdot p_2\cdot(p_2 + p_1) =$

   $\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{5}{18}$

   Bernd gewinnt mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 27,8%.

5. a) $B(100 / 0{,}05 / 5) = 0{,}18002$ b) $P(X > 8) = 1 - F_{0,05}^{100}(8) = 1 - 0{,}93691 = 6{,}309\%$

   c) $P(5 \le X < 10) = P(X \le 9) - P(X \le 4) = F_{0,05}^{100}(9) - F_{0,05}^{100}(4) = 0{,}97181 - 0{,}43598 = 53{,}583\%$

6. $P(\text{"Mindestens eine 6"}) \ge 99{,}9\% \Leftrightarrow 1 - P(\text{"Keine 6"}) \ge 0{,}999 \Leftrightarrow 1 - \left(\dfrac{5}{6}\right)^n \ge 0{,}999 \Leftrightarrow$

   $0{,}001 \ge \left(\dfrac{5}{6}\right)^n \Leftrightarrow \lg(0{,}001) \ge n\cdot\lg\left(\dfrac{5}{6}\right) \Leftrightarrow \dfrac{\lg(0{,}001)}{\lg(5/6)} \le n \Leftrightarrow n \ge 37{,}8...$

   Klaus muss mindestens 38 mal den Würfel werfen.

1. Klausur im 2. Kurshalbjahr des GK m2, K12, am 27.06.2006 * Gruppe B * Lösung

1. $\frac{(4+8+10)!}{4!\cdot 8!\cdot 10!} = \frac{22!}{4!\cdot 8!\cdot 10!} \approx 3{,}201\cdot 10^8$

2. $|\Omega| = 6^5 = 7776$

   a) $|A| = \binom{6}{5}\cdot 5! = 720$ d.h. $P(A) = \frac{720}{7776} = \frac{5}{54} \approx 9{,}3\%$

   b) $|B| = |\Omega| - 5^5 = 4651$ d.h. $P(B) = \frac{4651}{7776} \approx 59{,}8\%$

   c) $|C| = \binom{5}{2}\cdot 5^3 = 1250$ d.h. $P(A) = \frac{1250}{7776} \approx 16{,}1\%$

   d) $|D| = \binom{6}{1}\cdot 6^3 = 6^4 = 216$ d.h. $P(D) = \frac{1296}{7776} = \frac{1}{6} \approx 16{,}7\%$

3. a) $\frac{84}{96} = 87{,}5\%$ mussten weder die 7. noch die 9. Klasse wiederholen.

	7. bestanden	7. wiederholt	
9. bestanden	84	4	88
9. wiederholt	6	2	8
	90	6	96

   b) Wiederholerwahrscheinlichkeiten:

   $p_7 = \frac{6}{96}$; $p_9 = \frac{8}{96}$; $p_{7und9} = \frac{2}{96}$ und $p_7 \cdot p_9 = \frac{6}{96}\cdot\frac{8}{96} = \frac{1}{192} \neq p_{7und9} = \frac{2}{96}$,

   d.h. das Wiederholen der 7. und 9. Klasse ist stochastisch abhängig voneinander.

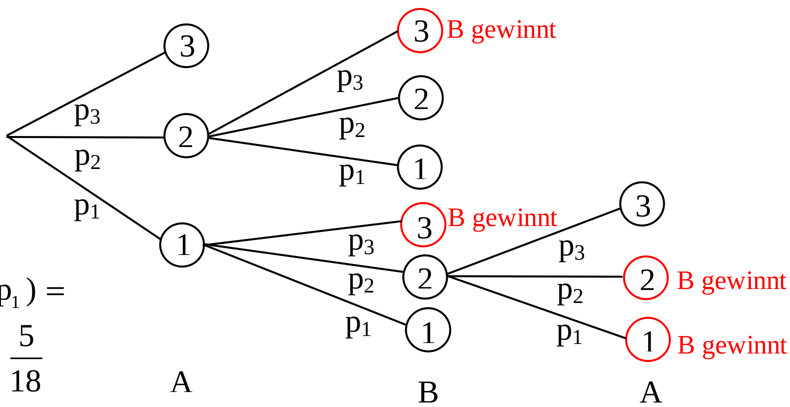
   c) Für m = Anzahl der Mädchen und j = Anzahl der Jungen gilt:

   $m > j > 0$ und $m + j = 96$ und, weil die 6 Wiederholer der 7. Klasse im Verhältnis der Geschlechter aufgeteilt werden müssen $m : j = 4 : 2$ oder $m : j = 5 : 1$.

   Also gilt für m: $m = \frac{4}{6}\cdot 96 = 64$ oder $m = \frac{5}{6}\cdot 96 = 80$

4. $p(\text{"1"}) = \frac{1}{6}$, $p(\text{"2"}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

   und $p(\text{"3"}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$



   $p(\text{"B gewinnt"}) =$

   $p_2 \cdot p_3 + p_1 \cdot p_3 + p_1 \cdot p_2 \cdot (p_2 + p_1) =$

   $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}\cdot(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}) = \frac{5}{18}$

   Bernd gewinnt mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 27,8%.

5. a) $B(100 / 0{,}04 / 4) = 0{,}19939$ b) $P(X > 6) = 1 - F^{100}_{0{,}04}(6) = 1 - 0{,}89361 = 10{,}639\%$

   c) $P(4 \le X < 9) = P(X \le 8) - P(X \le 3) = F^{100}_{0{,}04}(8) - F^{100}_{0{,}04}(3) = 0{,}98101 - 0{,}42948 = 55{,}153\%$

6. $P(\text{"Mindestens eine 6"}) \ge 99{,}5\% \Leftrightarrow 1 - P(\text{"Keine 6"}) \ge 0{,}995 \Leftrightarrow 1 - (\frac{5}{6})^n \ge 0{,}995 \Leftrightarrow$

   $0{,}005 \ge (\frac{5}{6})^n \Leftrightarrow \lg(0{,}005) \ge n\cdot\lg(\frac{5}{6}) \Leftrightarrow \frac{\lg(0{,}005)}{\lg(5/6)} \le n \Leftrightarrow n \ge 29{,}0...$

   Klaus muss mindestens 30 mal den Würfel werfen.