

GK m2 * Stochastik * Aufgaben zum Ereignisraum

1. A, B, C seien drei beliebige Ereignisse. Beschreiben Sie durch Terme der Ereignisalgebra

- | | | |
|--------------------------|---------------------|-------------------|
| a) A und B, aber nicht C | b) alle drei | c) keines |
| d) höchstens eines | e) mindestens eines | f) höchstens zwei |
| g) mindestens zwei | h) genau eines | i) genau zwei |

2. Für eine Lieferung von 4 Motoren definiert man folgende Ereignisse:

A = "Mindestens ein Motor ist defekt." B = "Höchstens ein Motor ist defekt."

Interpretieren Sie folgende Ereignisse:

- | | | | |
|---------------------------|----------------------------|---------------------|---------------------|
| 1) \bar{A} | 2) \bar{B} | 3) $A \cap B$ | 4) $A \cup B$ |
| 5) $A \setminus B$ | 6) $B \setminus A$ | 7) $A \cup \bar{B}$ | 8) $B \cup \bar{A}$ |
| 9) $\bar{A} \cap \bar{B}$ | 10) $\bar{A} \cup \bar{B}$ | | |

3. Aus einer Lieferung werden 4 Stück zur Prüfung entnommen. Sie werden auf brauchbar bzw. unbrauchbar hin untersucht.

- a) Legen Sie einen geeigneten Ergebnisraum fest und bestimmen Sie seine Mächtigkeit.
 b) Beschreiben Sie folgende Ereignisse durch Ergebnismengen:

A = "Das dritte Stück ist unbrauchbar:"

B = "Genau das dritte Stück ist unbrauchbar:"

C = "Mindestens zwei Stücke sind unbrauchbar."

D = "Genau drei Stücke sind brauchbar."

E = "Kein Stück ist brauchbar."

4. Untersuchen Sie, ob folgende Ereignisse unvereinbar sind:

- | | |
|---------------------------|---|
| a) A und $\bar{A} \cup B$ | b) A und $\bar{A} \cap \bar{B}$ |
| c) A und $\bar{A} \cap B$ | d) $\overline{A \cup B}$ und $\bar{A} \cap B$ |

5. Prüfen Sie die Gültigkeit folgender Behauptungen:

- | | | |
|---------------------|---------------|--------------------------------------|
| a) A, B unvereinbar | \Rightarrow | \bar{A}, \bar{B} unvereinbar |
| b) A, B unvereinbar | \Rightarrow | \bar{A}, B unvereinbar |
| c) A, B unvereinbar | \Rightarrow | \bar{A}, \bar{B} nicht unvereinbar |
| b) A, B unvereinbar | \Rightarrow | \bar{A}, B nicht unvereinbar |



6. a) Zeigen Sie: Die Ereignisse $A, \overline{A \cup B}, \bar{A} \cap B$ bilden eine Zerlegung von Ω . Fertigen Sie dazu eine Skizze an.

- b) Die Fußballmannschaften I und II spielen gegeneinander.
 A bedeute "I siegt"; B bedeute "II siegt".
 Interpretieren Sie die Ereignisse aus 6a).

7. An einem Wettbewerb nehmen n Sportler teil.

A_i sei das Ereignis "Der Sportler mit der Startnummer i erreicht genau den i-ten Platz".

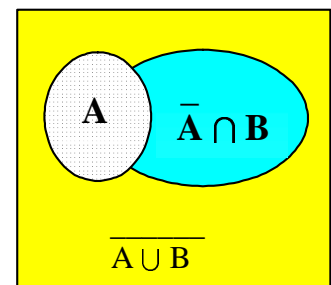
Interpretieren Sie folgende Ereignisse:

- | | |
|---|---|
| a) $\bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$ | b) $\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ |
| c) $\bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i$ | d) $\bigcup_{i=1}^n \bar{A}_i$ |
| e) $\bigcup_{i=1}^n \left(A_i \cap \bigcap_{k \neq i} \bar{A}_k \right)$ | |

GK m2 * Stochastik * Aufgaben zum Ereignisraum * Lösungen

1. a) $A \cap B \cap \bar{C}$ b) $A \cap B \cap C$
 c) $\overline{A \cap B \cap C} = \overline{A \cup B \cup C}$
 d) $\overline{A \cap B \cap C} = (\overline{A \cap B \cap C}) \cup (\overline{A \cap B \cap C}) \cup (\overline{A \cap B \cap C}) \cup (\overline{A \cap B \cap C})$
 e) $\overline{A \cap B \cap C} = A \cup B \cup C$ f) $\overline{A \cap B \cap C} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$
 g) $(A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap C)$
 h) $(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C)$
 i) $(A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap C)$
2. 1) $\bar{A} =$ “Kein Motor defekt” 2) $\bar{B} =$ “Mindestens 2 Motoren defekt”
 3) $A \cap B =$ “Genau ein Motor defekt” 4) $A \cup B =$ sicheres Ereignis
 5) $A \setminus B =$ “Mindestens 2 Motoren defekt” = \bar{B}
 6) $B \setminus A =$ “Kein Motor defekt” 7) $A \cup \bar{B} = A =$ “Mindestens 1 Motor defekt”
 8) $B \cup \bar{A} = B =$ “Höchstens ein Motor defekt”
 9) $\overline{A \cap \bar{B}} = \overline{A \cup B} = \{\} =$ unmögliches Ereignis
 10) $\overline{A \cup \bar{B}} = \overline{A \cap B} =$ “Kein Motor oder mindestens 2 Motoren defekt”
3. a) $\Omega = \{ (0000), (0001), (0010), (0011), (0100), (0101), (0110), (0111), (1000), (1001), (1010), (1011), (1100), (1101), (1110), (1111) \}$ und $|\Omega| = 16$
 Hierbei bedeute 1 “Stück brauchbar” und 0 “Stück unbrauchbar”.
 b) $A = \{ (0000), (0001), (0100), (1000), (0101), (1001), (1100), (1101) \}$
 $B = \{ (1101) \}$
 $C = \{ (0000), (1000), (0100), (0010), (0001), (0011), (0101), (0110), (1001), (1010), (1100) \}$
 $D = \{ (0111), (1011), (1101), (1110) \}$ $E = \{ (0000) \}$
4. a) $A \cap \overline{A \cup B} = A \cap \bar{A} \cap \bar{B} = \{\}$, also sind die beiden Ereignisse unvereinbar.
 b) $A \cap \overline{A \cap B} = A \cap (\bar{A} \cup \bar{B}) = A \cap \bar{B} \neq \{\}$ im Allgemeinen, d.h. die beiden Ereignisse sind im Allgemeinen nicht unvereinbar.
 c) $A \cap (\bar{A} \cap B) = \{\}$, also sind die beiden Ereignisse unvereinbar.
 d) $\overline{A \cup B} \cap (\bar{A} \cap B) = \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{A} \cap B = \{\}$, also sind die beiden Ereignisse unvereinbar.
5. Für alle 4 Teilaufgaben gelte für die Gegenbeispiele $\Omega = \{ 1, 2, 3, 4 \}$
 a) falsch! Gegenbeispiel $A = \{ 1 \}$ und $B = \{ 2 \}$
 b) falsch! Gegenbeispiel $A = \{ 1 \}$ und $B = \{ 2 \}$
 c) falsch! Gegenbeispiel $A = \{ 1, 3 \}$ und $B = \{ 2, 4 \}$
 d) im Allgemeinen richtig mit einer Ausnahme, nämlich $A = \Omega$ und $B = \{\}$.

6. a) Zerlegung heißt:
 A und $(\bar{A} \cap B)$ und $\overline{A \cup B}$ sind paarweise unvereinbar
 und $A \cup (\bar{A} \cap B) \cup \overline{A \cup B} = \Omega$
 b) $A =$ “I siegt”
 $\bar{A} \cap B =$ “II siegt”
 $\overline{A \cup B} =$ “Keiner siegt” = “unentschieden”



7. a) “Jeder Sportler erreicht den Platz, der seiner Startnummer entspricht.”
 b) “Wenigstens ein Sportler erreicht den Platz, der seiner Startnummer entspricht.”
 c) “Kein Sportler erreicht den Platz, der seiner Startnummer entspricht.”
 d) “Mindestens ein Sportler erreicht nicht den Platz, der seiner Startnummer entspricht.”
 e) “Genau ein Sportler erreicht den Platz, der seiner Startnummer entspricht.”