GK Mathematik * K12
Summenzeichen, Streifenmethode, bestimmtes Integral

Bei den folgenden Aufgaben dürfen die folgenden Formeln Potenzsummen verwendet werden (siehe auch mathematische Formelsammlung):

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n\cdot(n+1)}{2} \qquad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6} \qquad \sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n\cdot(6n^4+15n^3+10n^2-1)}{30}$$

1. Berechnen Sie die folgenden Summen!

a) $\sum_{i=1}^{345} i =$

b) $\sum_{i=1}^{100} (2i+1) =$

c) $\sum_{i=100}^{200} (150-i) =$

d) $\sum_{n=10}^{50} (n^2+2n+1) =$

e) $\sum_{i=1}^{100} (2n+1) =$ (Vorsicht!)

f) $\sum_{n=1}^{100} \frac{i^2-1}{100} =$ (Vorsicht! Indizes!)

2. Weisen Sie die folgenden Gleichungen durch geeignete Umformungen nach!

a) $\sum_{i=10}^{50} (i^2+2i+1) = \sum_{i=11}^{51} i^2 = 45141$

b) $\sum_{i=0}^{20} (i^2+2i+1) = \sum_{i=1}^{20} i^2 + 2\cdot[\sum_{i=1}^{20} i\,] + 21 = 3311$

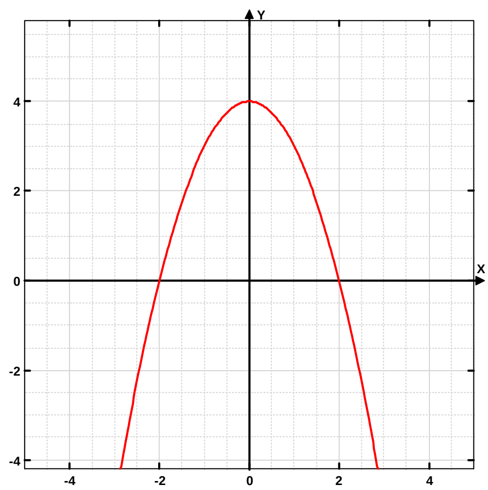
c) $\sum_{n=0}^{100} (n^3-1) = [\sum_{n=1}^{100} n^3\,] - 101 = 25502399$

3. Berechnen Sie nach der Streifenmethode die beiden folgenden bestimmten Integrale! (Ermitteln Sie dazu zuerst Unter- und Obersumme!)
Fertigen Sie eine Skizze an und überprüfen Sie Ihr Ergebnis mit einer geometrischen Berechnung.

a) $\int_1^3 0{,}5x+1\,dx =$

b) $\int_0^5 6-x\,dx =$

4. Berechnen Sie nach der Streifenmethode das bestimmte Integral $\int_0^2 4-x^2\,dx$.
Kennzeichnen Sie den zugehörigen Flächeninhalt in der nebenstehenden Zeichnung.



Lösungen zum Aufgabenblatt ***„Summenzeichen, Streifenmethode, bestimmtes Integral"***

1\. a) $\sum_{i=1}^{345} i = \frac{345\cdot 346}{2} = 59685$

b) $\sum_{i=1}^{100}(2i+1) = 2\cdot\sum_{i=1}^{100} i + 100\cdot 1 = 2\cdot\frac{100\cdot 101}{2} + 100 = 10200$

c) $\sum_{i=100}^{200}(150-i) = 101\cdot 150 + \sum_{i=1}^{200}(-i) - \sum_{i=1}^{99}(-i) = 15150 - \frac{200\cdot 201}{2} + \frac{99\cdot 100}{2} =$
$15150 - 20100 + 4950 = 0$

d) $\sum_{n=10}^{50}(n^2+2n+1) = \sum_{n=10}^{50}(n+1)^2 = \sum_{i=11}^{51} i^2 = \sum_{i=1}^{51} i^2 - \sum_{i=1}^{10} i^2 = \frac{51\cdot 52\cdot 103}{6} - \frac{10\cdot 11\cdot 21}{6} =$
$45526 - 385 = 45141$

e) $\sum_{i=1}^{100}(2n+1) = 100\cdot(2n+1) = 200n+100$

f) $\sum_{n=1}^{100}\frac{i^2-1}{100} = 100\cdot\frac{i^2-1}{100} = i^2-1$

3\. a) $\Delta x = \frac{3-1}{n} = \frac{2}{n}$ *und* $x_i = 1 + \frac{2i}{n}$; für die Untersumme s_n bzw. Obersumme S_n gilt

$$s_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\cdot\Delta x = \sum_{i=0}^{n-1}[0,5\cdot(1+\frac{2i}{n}) + 1]\cdot\frac{2}{n} = \sum_{i=0}^{n-1}[\frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}\cdot i] = n\cdot\frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}\cdot\frac{(n-1)\cdot n}{2} =$$
$$3 + \frac{n-1}{n} = 4 - \frac{1}{n}$$

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1})\cdot\Delta x = \sum_{j=1}^{n}[0,5\cdot(1+\frac{2j}{n}) + 1]\cdot\frac{2}{n} = \sum_{j=1}^{n}[\frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}\cdot j] = n\cdot\frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}\cdot\frac{n\cdot(n+1)}{2} =$$
$$3 + \frac{n+1}{n} = 4 + \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n = 4 \quad\Rightarrow\quad \int_1^3 0,5\cdot x + 1\,dx = 4$$

b) $\Delta x = \frac{5-0}{n} = \frac{5}{n}$ *und* $x_i = 0 + \frac{5i}{n} = \frac{5i}{n}$ *und* $f(x) = 6 - x$ *ist monoton fallend*

$$s_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1})\cdot\Delta x = \sum_{j=1}^{n}(6-x_j)\cdot\frac{5}{n} = \sum_{j=1}^{n}(6-\frac{5j}{n})\cdot\frac{5}{n} = \sum_{j=1}^{n}(\frac{30}{n}-\frac{25j}{n^2}) =$$
$$n\cdot\frac{30}{n} - \frac{25}{n^2}\cdot\frac{n\cdot(n+1)}{2} = 30 - 12,5\cdot\frac{n+1}{n} = 30-12,5-\frac{12,5}{n} = 17,5-\frac{12,5}{n}$$

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\cdot\Delta x = \sum_{i=0}^{n-1}(6-x_i)\cdot\frac{5}{n} = \sum_{i=0}^{n-1}(6-\frac{5i}{n})\cdot\frac{5}{n} = \sum_{i=0}^{n-1}(\frac{30}{n}-\frac{25i}{n^2}) =$$
$$n\cdot\frac{30}{n} - \frac{25}{n^2}\cdot\frac{(n-1)\cdot n}{2} = 30 - 12,5\cdot\frac{n-1}{n} = 30-12,5+\frac{12,5}{n} = 17,5+\frac{12,5}{n}$$

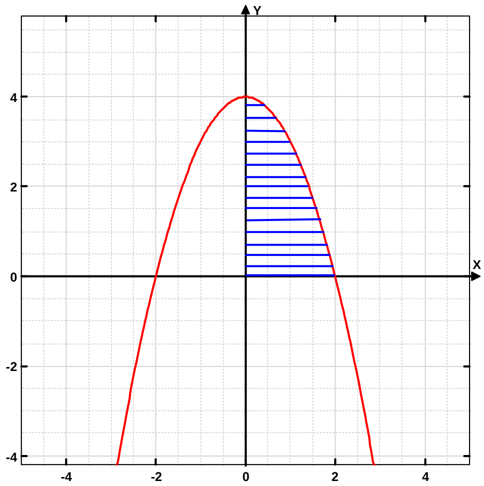
$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n = 17,5 \quad\Rightarrow\quad \int_0^5 6-x\;dx = 17,5$$

4.

$$\int_0^2 4 - x^2 \; dx$$

$$\Delta x = \frac{2}{n} \quad und \quad x_i = \frac{2i}{n}$$

$f(x) = 4 - x^2$ *ist in* $[0;2]$
monoton fallend $\Rightarrow$



$$s_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1}) \cdot \Delta x = \sum_{j=1}^{n} (4 - x_j^{\,2}) \cdot \frac{2}{n} = \sum_{j=1}^{n} (4 - \frac{4j^2}{n^2}) \cdot \frac{2}{n} = \sum_{j=1}^{n} (\frac{8}{n} - \frac{8j^2}{n^3}) =$$

$$n \cdot \frac{8}{n} - \frac{8}{n^3} \cdot \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} = 8 - \frac{4}{3} \cdot \frac{2n^2 + 3n + 1}{n^2} =$$

$$8 - \frac{4}{3} \cdot (2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}) = \frac{16}{3} - \frac{4}{n} - \frac{4}{3n^2}$$

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot \Delta x = \sum_{i=0}^{n-1} (4 - x_i^{\,2}) \cdot \frac{2}{n} = \sum_{i=0}^{n-1} (4 - \frac{4i^2}{n^2}) \cdot \frac{2}{n} = \sum_{i=0}^{n-1} (\frac{8}{n} - \frac{8i^2}{n^3}) =$$

$$n \cdot \frac{8}{n} - \frac{8}{n^3} \cdot \frac{(n-1) \cdot n \cdot (2n-1)}{6} = 8 - \frac{4}{3} \cdot \frac{2n^2 - 3n + 1}{n^2} =$$

$$8 - \frac{4}{3} \cdot (2 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}) = \frac{16}{3} + \frac{4}{n} - \frac{4}{3n^2}$$

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} S_n = \frac{16}{3} \quad \Rightarrow \quad \int_0^2 4 - x^2 \; dx = \frac{16}{3}$$