GK Mathematik * K12
Übungsaufgaben zum natürlichen Logarithmus und zur Exponentialfunktion

Im Unterricht wurde für die Funktion $\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$ gezeigt:

$\ln(x) = \log_e x$, d.h. $f(x) = e^x$ und $g(x) = \ln(x)$ sind Umkehrfunktionen zueinander
und $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$

Aufgaben:

1. Lösen Sie die Gleichungen. Runden Sie gegebenenfalls auf 3 Dezimalstellen.

   a) $0{,}5 \cdot \ln(x^2) - \ln(x+1) + \ln(5) = \ln(2x)$

   b) $\log_{0,1}(2x) - \ln(e) = \lg(x)$

   c) $2e^{3x-4} = 5$

   d) $e^{2x} + e^{x+1} = 2e^x + 2e$

2. Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen jeweils den maximalen Definitionsbereich, alle Nullstellen, das Verhalten am Rand des Definitionsbereichs und alle Hoch- bzw. Tiefpunkte.

   a) $f(x) = \ln\left(\frac{8x}{9-x^2}\right)$ b) $f(x) = \ln\left(\frac{x^2+2}{4x-2}\right)$

   c) $f(x) = \ln(5x-4) - \ln(x^2+2)$

3. Wo und unter welchem Winkel schneiden sich die Graphen G_f und G_g ?

   $f(x) = \ln(x^2 - 5)$; $g(x) = \ln(x+7)$

4. Diskutieren Sie die Funktion und zeichnen Sie den Graphen zu

   $f(x) = \ln|2 - x|$

5. Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale.

   a) $\int_1^e \frac{2}{x}\,dx$ b) $\int_1^2 \frac{3+4x}{5x}\,dx$

   c) $\int_1^2 \frac{x^3+2x}{x^2}\,dx$ d) $\int_{-2}^{-1} \frac{x^3+2x}{x^2}\,dx$

   e) $\int_1^2 2 \cdot e^x\,dx$ f) $\int_0^1 2 \cdot e^{5x}\,dx$

Lösungen:

1\. a) x = 1,5 b) $x = \frac{\sqrt{5}}{10} \approx 0{,}224$

c) $x = \frac{4+\ln(2{,}5)}{3} \approx 1{,}639$ d) $x = \ln(2) \approx 0{,}693$

2\. a) $D_f =]-\infty\,;-3\,[\,\cup\,]\,0\,;3\,[$; NSt. $x_1 = -9$; $x_2 = 1$

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{< \\ x\to -3}} f(x) = \lim\limits_{\substack{< \\ x\to 3}} f(x) = +\infty$

$f'(x) = \frac{9+x^2}{x\,(9-x^2)} > 0$ für alle $x \in D_f$, d.h. es gibt keine HOP bzw. TIP.

b) $D_f =]\,0{,}5\,;\infty\,[$; NSt. $x_{1/2} = 2$ (doppelte Nullstelle)

$\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0{,}5}} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ und $f'(x) = \frac{4\cdot(x^2-x-2)}{(4x-2)\cdot(x^2+2)}$

TIP (2 / 0)

c) $D_f =]\,0{,}8\,;\infty\,[$; NSt. $x_1 = 2$; $x_2 = 3$

$\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0{,}8}} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ und $f'(x) = \frac{10+8x-5x^2}{(5x-4)\cdot(x^2+2)}$

HOP $(0{,}8+0{,}2\sqrt{66}\ /\ \ldots) \approx (2{,}42\ /\ 0{,}03)$

3\. Zwei Schnittpunkte: S_1 (4 / ln(11)) mit $\varphi_1 \approx 30{,}8^\circ$ und S_2 (-3 / ln(4)) mit $\varphi_2 \approx 70{,}3^\circ$

4\. Verwenden Sie zur Kontrolle geeignete Software!

5\. a) $\int_1^e \frac{2}{x}\,dx = 2$

b) $\int_1^2 \frac{3+4x}{5x}\,dx = 0{,}8 + 0{,}6\cdot\ln(2) \approx 1{,}22$

c) $\int_1^2 \frac{x^3+2x}{x^2}\,dx = 1{,}5 + \ln(4) \approx 2{,}89$

d) $\int_{-2}^{-1} \frac{x^3+2x}{x^2}\,dx = -1{,}5 - \ln(4) \approx -2{,}89$

e) $\int_1^2 2\cdot e^x\,dx = 2e\cdot(e-1) \approx 9{,}34$

f) $\int_0^1 2\cdot e^{5x}\,dx = 0{,}4\cdot(e^5-1) \approx 58{,}97$