

GK / LK Mathematik * Aufgaben zur Bernoulli-Kette

1. Ein Laplace-Würfel wird 100mal geworfen.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für die folgenden Ereignisse?
 - a) A = „Höchstens 10mal eine 6“
 - b) B = „Mindestens 20mal eine Zahl größer als 2“
 - c) C = „Genau 55mal eine gerade Ziffer“
 - d) D = „Mehr als 45mal eine gerade Ziffer“

2. Mit zwei idealen Würfeln wird 20mal geworfen.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für die folgenden Ereignisse?
 - a) A = „Genau zweimal die Augensumme 7“
 - b) B = „Mindestens zweimal die Augensumme 7“
 - c) C = „Niemals die Augensumme 6“
 - d) D = „Genau dreimal einen Pasch“ (Pasch bedeutet zwei gleiche Ziffern)
 - e) E = „Niemals eine 1“

3.
 - a) Wie oft muss man eine Laplace-Münze mindestens werfen, damit man mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99% mindestens einmal „Kopf“ erhält?
 - b) Beim „Mensch ärgere dich nicht“ darf jeder, der an der Reihe ist, am Anfang dreimal würfeln. Nur wer dabei eine 6 würfelt, darf dann herauskommen.
Wie oft muss man mindestens an der Reihe sein, wenn man mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95% herauskommen will?

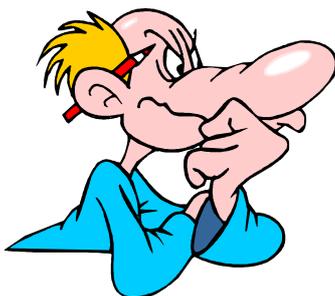
4. Hans schießt auf die Torwand, und zwar zuerst auf das untere und anschließend auf das obere Loch.
Aus langjähriger Erfahrung weiß er: Mit einer Wahrscheinlichkeit von 25% trifft er „oben“ und - unabhängig davon - trifft er mit einer Wahrscheinlichkeit von 40% „unten“.
 - a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft er „oben und unten“?
 - b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft er genau einmal?
 - c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft er nicht?

Nun wiederholt Hans 20mal das Schießen auf das untere und obere Loch.

 - d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft er genau dreimal „oben und unten“?
 - e) Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft er bei genau 15 Versuchen weder das untere noch das obere Loch?
 - f) Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft er bei höchstens 5 Versuchen beide Löcher?
 - g) Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft er in mindestens 16 Versuchen mindestens eines der beiden Löcher?

Hans will mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% bei wenigstens einem Versuch beide Löcher treffen.
Wie oft muss er dann seine zwei Schüsse auf die Torwand mindestens abgeben?

Viel Erfolg beim Üben!



Aufgaben zur Bernoulli-Kette * Lösungen

1. a) $P_{1/6}^{100}(k \leq 10) = \sum_{i=0}^{10} B(100; \frac{1}{6}; i) = 0,04270 = 4,270\%$
- b) $P_{4/6}^{100}(k \geq 20) = 1 - P_{2/3}^{100}(k \leq 19) = 1 - \sum_{i=0}^{19} B(100; \frac{2}{3}; i) = 1 - 0,00000 = 100,000\%$
- c) $P_{3/6}^{100}(k = 55) = B(100; 0,5; 55) = 0,04847 = 4,847\%$
- d) $P_{3/6}^{100}(k > 45) = 1 - P_{0,5}^{100}(k \leq 45) = 1 - \sum_{i=0}^{45} B(100; 0,5; i) = 1 - 0,18410 = 81,590\%$
2. $7 = 1+6 = 2+5 = 3+4$; $P(\text{„Augensumme 7 bei einem Wurf“}) = \frac{3 \cdot 2}{6 \cdot 6} = \frac{1}{6}$
- $6 = 1+5 = 2+4 = 3+3$; $P(\text{„Augensumme 6 bei einem Wurf“}) = \frac{2 \cdot 2 + 1}{6 \cdot 6} = \frac{5}{36}$
- $P(\text{„Pasch bei einem Wurf“}) = \frac{6}{6 \cdot 6} = \frac{1}{6}$
- $P(\text{„Keine 1 bei einem Wurf“}) = 1 - \frac{6+6-1}{6 \cdot 6} = \frac{25}{36}$
- a) $P(A) = P_{1/6}^{20}(k = 2) = B(20; \frac{1}{6}; 2) = 19,824\%$
- b) $P(B) = P_{1/6}^{20}(k \geq 2) = 1 - P_{1/6}^{20}(k \leq 1) = 1 - 0,13042 = 86,958\%$
- c) $P(C) = (1 - \frac{5}{36})^{20} = \left(\frac{31}{36}\right)^{20} \approx 5,026\%$
- d) $P(D) = P_{1/6}^{20}(k = 3) = B(20; \frac{1}{6}; 3) = 23,789\%$
- e) $P(E) = P_{25/36}^{20}(k = 0) = B(20; \frac{25}{36}; 0) = \left(\frac{11}{36}\right)^{20} \approx 5,03 \cdot 10^{-9} \%$
3. a) $P_{0,5}^n(k \geq 1) \geq 99\% \Leftrightarrow 1 - P_{0,5}^n(k = 0) \geq 0,99 \Leftrightarrow 0,01 \geq 0,5^n \Leftrightarrow$
 $\ln(0,01) \geq n \cdot \ln(0,5) \Leftrightarrow \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,5)} \leq n \Leftrightarrow n \geq 6,6\dots \text{ also } n \geq 7$
- b) $P(\text{„Mindestens eine 6 bei drei Würfeln“}) = 1 - \frac{5 \cdot 5 \cdot 5}{6 \cdot 6 \cdot 6} = \frac{91}{216}$
- $P_{91/216}^n(k \geq 1) \geq 95\% \Leftrightarrow 1 - P_{91/216}^n(k = 0) \geq 0,95 \Leftrightarrow 0,05 \geq \left(\frac{125}{216}\right)^n \Leftrightarrow$
 $\ln(0,05) \geq n \cdot \ln\left(\frac{125}{216}\right) \Leftrightarrow \frac{\ln(0,05)}{\ln(125/216)} \leq n \Leftrightarrow n \geq 5,4\dots \text{ also } n \geq 6$
4. a) $P(\text{„oben und unten“}) = p_1 = 0,40 \cdot 0,25 = 0,10$
- b) $P(\text{„genau einmal“}) = p_2 = 0,40 \cdot 0,75 + 0,60 \cdot 0,25 = 0,45$
- c) $P(\text{„trifft nicht“}) = p_3 = 0,60 \cdot 0,75 = 0,45 = 1 - p_1 - p_2$
- d) $P_{0,10}^{20}(k = 3) = B(20; 0,10; 3) = 19,012\%$ e) $P_{0,45}^{20}(k = 15) = B(20; 0,45; 15) = 0,490\%$
- f) $P_{0,10}^{20}(k \leq 5) = \sum_{i=0}^5 B(20; 0,10; i) = 98,875\%$
- g) $P_{0,55}^{20}(k \geq 16) = 1 - P_{0,55}^{20}(k \leq 15) = 1 - 98,114\% = 1,886 \%$
- letzte Aufgabe: $P_{0,10}^{20}(k \geq 1) \geq 95\% \Leftrightarrow 0,05 \geq 0,90^n \Leftrightarrow n \geq 28,4\dots \text{ also } n \geq 29$