# Klausur im GK m2 * K13 * 12.03.2007

1. Im $R^3$ sind die Punkte A(1/2/3), B(3/6/7) und C(4/2/6) gegeben.

   a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC gleichschenklig mit der Basis [AB] ist und berechnen Sie die Größe des Winkels $\gamma$ an der Spitze C des Dreiecks.

   b) Bestimmen Sie die Länge der Höhe $h_c$ und zeigen Sie, dass der Flächeninhalt des gleichschenkligen Dreiecks $F_{ABC} = 9$ beträgt.

   c) Für das Volumen einer Pyramide mit der Grundfläche F und der Höhe h gilt:
   $$V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} \cdot F \cdot h \ .$$
   Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punktes S so, dass die Pyramide ABCS das Volumen V = 45 besitzt.

2. Im $R^3$ sind die Ebene $E: -2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 7 = 0$ und

   die Gerade $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ gegeben.

   a) Zeigen Sie, dass die Gerade g parallel zur Ebene E verläuft und von der Ebene E den Abstand d = 7 hat.

   b) Spiegelt man die Gerade g an der Ebene E, so erhält man die Gerade $g^*$. Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden $g^*$.

   c) Gibt es eine Gerade h, die ganz in der Ebene E liegt und windschief zu g ist und von g den Abstand 8 hat?
   Begründen Sie Ihre Antwort (ohne Rechnung, aber u. U. mit einer Skizze)!

3. Im $R^3$ sind die beiden Punkte A(2/3/1) und B(3/4/6) und die

   Ebene $E: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ gegeben.

   a) Geben Sie E in der HNF an und bestimmen Sie den Abstand des Punktes B von E.
   (Teilergebnis: d (B;E) = + 3 )

   b) Die Gerade g = AB und die Ebene E schneiden sich im Punkt A.
   Bestimmen Sie den Schnittwinkel (auf Zehntel-Grad gerundet), unter dem sich g und E schneiden.

   c) Die Gerade h ist die senkrechte Projektion von g = AB auf die Ebene E.
   Skizzieren Sie die Lage von E, g und h zueinander und bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden h .

| Aufgabe | 1a | b | c | 2a | b | c | 3a | b | c | Summe |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Punkte | 5 | 4 | 5 | 5 | 4 | 2 | 6 | 4 | 5 | 40 |

Gutes Gelingen! G.R.

Klausur im GK m2 * K13 * 12.03.2007 * Lösung

1. a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ ; $\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ ; $\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\overline{CA} = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$

und $\overline{CB} = \sqrt{1+16+1} = 3\sqrt{2}$ und $\overline{AB} = \sqrt{4+16+16} = 6$

wegen $\overline{CA} = 3\sqrt{2} = \overline{CB}$ ist $\Delta ABC$ gleichschenklig mit Basis [AB].

$$\cos\gamma = \frac{\overrightarrow{CA} \circ \overrightarrow{CB}}{\overline{CA} \cdot \overline{CB}} = \frac{3+0-3}{3\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma = 90^\circ$$

b) $\Delta ABC$ ist gleichschenklig mit rechtem Winkel an der Spitze,

d.h. $h_c = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4+16+16} = 3$ und $F_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot h_c = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 = 9$

c) Aus $V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} \cdot F \cdot h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{3 \cdot V}{F} = \frac{3 \cdot 45}{9} = 15$ .

Für den Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene E, die das Dreieck ABC festlegt, gilt:

$\vec{n} \circ \overrightarrow{AC} = 0$ und $\vec{n} \circ \overrightarrow{CB} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad n_1 = -n_3$ und $n_1 = 4n_2 + n_3 \Rightarrow n_1 = 2n_2$

wähle z.B. $n_2 = 1 \Rightarrow n_1 = 2$ und $n_3 = -2$ also $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{n}^{\,o} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

z.B. $\vec{S} = \vec{A} + 15 \cdot \vec{n}^{\,0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 15 \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix}$ also S(11/7/-7)

2. a) $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$ ; aus $\vec{n}_E \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = 6 - 12 + 6 = 0$ folgt $g \perp \vec{n}_E$ und damit $g \parallel E$.

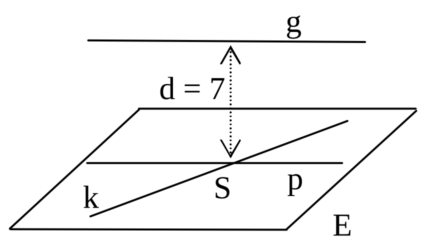
$\left|\vec{n}_E\right| = \sqrt{4+9+36} = 7$ ; $E_{HNF}: \frac{1}{7} \cdot (2x_1 - 3x_2 - 6x_3 - 7) = 0$ ; für $A(3/2/7) \in g$ gilt

$d(A;E) = \frac{1}{7} \cdot (2 \cdot 3 - 3 \cdot 2 - 6 \cdot 7 - 7) = -7$ , d.h. g hat von E den Abstand 7 .

b) Für den Spiegelpunkt $A^*$ von A bei der Spiegelung an E gilt:

$\overrightarrow{A^*} = \vec{A} + 2 \cdot 7 \cdot \vec{n}_E^{\,o} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} + 2 \cdot \frac{7}{7} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} \Rightarrow A^*(7/-4/-5) \Rightarrow g^*: \vec{X} = \overrightarrow{A^*} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) Eine Gerade h mit der geforderten Eigenschaft gibt es nicht, denn jede Gerade k, die in E liegt und nicht parallel zu g ist, schneidet die senkrechte Projektion p von g auf die Ebene E in einem Schnittpunkt S, der von g den Abstand d = d(g;E) = 7 hat. Jede Gerade h, die ganz in E liegt und windschief zu g liegt, hat damit den Abstand d = 7 von g.



3. a) Für $\vec{n}_E$ gilt: $3n_1 + 2n_2 + 2n_3 = 0$ und $2n_2 - n_3 = 0 \Rightarrow n_3 = 2n_2$ und $3n_1 = -3n_3$

Wähle z.B. $n_2 = 1 \Rightarrow n_3 = 2$ und $n_1 = -2$ also $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$E: \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{X} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2x_1 + x_2 + 2x_3 - (-4+3+2) = 0$$

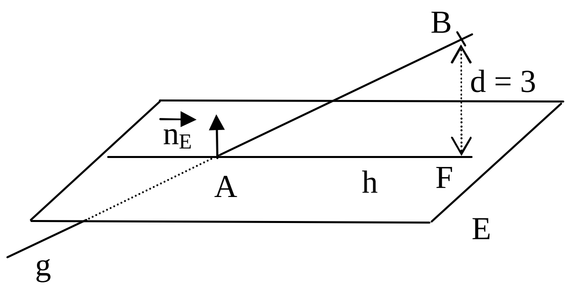
$$E_{HNF}: \frac{1}{3} \cdot (-2x_1 + x_2 + 2x_3 - 1) = 0$$

$$d(B;E) = \frac{1}{3} \cdot (-2 \cdot 3 + 4 + 2 \cdot 6 - 1) = +3$$

b) $$\cos(\varphi^*) = \frac{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3-2 \\ 4-3 \\ 6-1 \end{pmatrix}}{\sqrt{4+1+4} \cdot \sqrt{1+1+25}} = \frac{-2+1+10}{3 \cdot 3\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \Rightarrow \quad \varphi^* \approx 54{,}7^o$$

d.h. der gesuchte Schnittwinkel hat die Größe $\varphi = 90^0 - \varphi^* \approx 35{,}3^o$.

c)




$$\vec{F} = \vec{B} - 3 \cdot \vec{n}_E^{\,o} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} - 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \overrightarrow{AF} = \begin{pmatrix} 5-2 \\ 3-3 \\ 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$