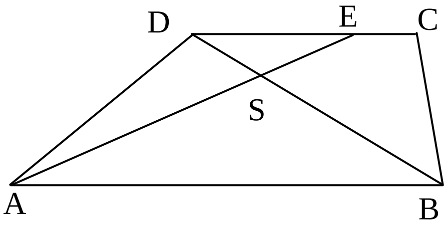
Klausur im GK m2 * K13 * 15.01.2007

1. Das Viereck ABCD ist ein Trapez mit $AB \| CD$ und $\overline{AB} = 2 \cdot \overline{CD}$.

   E teilt die Strecke [DC] im Verhältnis 2 : 1.

   S ist der Schnittpunkt von AE und DB.

   In welchem Verhältnis teilt S die Strecke [DB]?



(Die Zeichnung ist nicht maßstäblich!)

2. Gegeben sind die Punkte A(1/0/2), B(5/2/2) und C(-2/0/5) im R^3.

   Die Punkte A, B und C legen die Ebene **E** fest.

   Die Gerade g ist gegeben durch $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (mit $t \in R$)

   a) Begründen Sie, dass die Punkte A, B und C ein Dreieck bilden.

   b) Das Viereck ABCD ist ein Parallelogramm. Bestimmen Sie die Koordinaten von D.

   c) Geben Sie eine Gleichung der durch A, B und C festgelegten Ebene **E** an und ermitteln Sie den Schnittpunkt S der Geraden g mit dieser Ebene **E**. (Ergebnis: S(2/1/3))

   d) Begründen Sie, dass der Schnittpunkt S im Innern des Dreiecks ABC liegt:
   (Hinweis: Stellen Sie $\overrightarrow{AS}$ als Linearkombination von $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ dar und skizzieren Sie die Lage von S im Dreieck ABC.)

3. Gegeben ist die Ebene **E** mit **E** : $\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (mit $r, s \in R$)

   a) Der Punkt P(-1/1/p_3) liegt in **E**. Bestimmen Sie p_3.

   b) Bestimmen Sie eine Gleichung der Spurgeraden g von **E** in der $x_2 x_3$ – Ebene.

   c) Zeigen Sie, dass die Gerade $h: \vec{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (mit $t \in R$)

   parallel zur Ebene **E** verläuft und nicht in **E** liegt.

   d) Gibt es eine Gerade k, die ganz in E liegt und windschief zu h ist?
   Begründen Sie kurz Ihre Antwort!

Aufgabe	1	2a	b	c	d	3a	b	c	d	Summe
Punkte	10	3	3	7	5	4	5	5	3	45

Gutes Gelingen! G.R.

Klausur im GK m2 * K13 * 15.01.2007 * Lösung

1. $\vec a = \overrightarrow{AB}$ und $\vec b = \overrightarrow{AD}$ sind linear unabhängig und es gilt:

$$\overrightarrow{DE} = \frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{DC} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\vec a = \frac{1}{3}\cdot\vec a \quad ; \quad \overrightarrow{AS} = r\cdot\overrightarrow{AE} = r\cdot(\vec b+\overrightarrow{DE}) = r\cdot\vec b + r\cdot\frac{1}{3}\cdot\vec a$$

$$\overrightarrow{SD} = s\cdot\overrightarrow{BD} = s\cdot(-\vec a+\vec b) = -s\cdot\vec a + s\cdot\vec b$$

$$\vec 0 = \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SD}+\overrightarrow{DA} = r\cdot\vec b + r\cdot\frac{1}{3}\cdot\vec a \;\; -s\cdot\vec a + s\cdot\vec b - \vec b = \left(\frac{r}{3} - s\right)\cdot\vec a + (r+s-1)\cdot\vec b$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit von $\vec a$ und $\vec b$ folgt daraus:

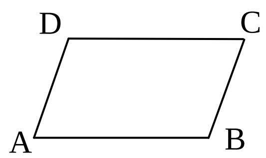
(1) $\frac{r}{3} - s = 0$ und (2) $r+s-1 = 0$ d.h. $r = 3s$ und damit $3s + s = 1$,

also $s = \frac{1}{4}$ und $r = \frac{3}{4}$; $\overline{SD} = s\cdot\overline{BD}$ d.h. $\overline{SD} = \frac{1}{4}\cdot\overline{BD}$ und $\overline{SB} = \frac{3}{4}\cdot\overline{BD} \Rightarrow$

S teilt also die Strecke [DB] im Verhältnis 1 : 3 .

2. a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}5-1\\2-0\\2-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\2\\0\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}-2-1\\0-0\\5-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\0\\3\end{pmatrix}$; da ersichtlich $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ nicht parallel sind, bilden die drei Punkte A, B und C ein Dreieck.

b) $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow \begin{pmatrix}-2\\0\\5\end{pmatrix} - \vec D = \begin{pmatrix}4\\2\\0\end{pmatrix} \Rightarrow$



$\vec D = \begin{pmatrix}-2\\0\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\-2\\5\end{pmatrix}$ also D(-6/-2/5)

c) E: $\vec X = \vec A + r\cdot\overrightarrow{AB} + s\cdot\overrightarrow{AC}$ also E: $\vec X = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}4\\2\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-3\\0\\3\end{pmatrix}$

$g \cap E$:

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}4\\2\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-3\\0\\3\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{ll}(1) & 0 = 4r - 3s + t\\ (2) & 2 = 2r \qquad\;\; - t\\ (3) & 1 = \qquad 3s\end{array}$$

aus (3) folgt $\Rightarrow s = \frac{1}{3}$; eingesetzt in (1) und (2) :

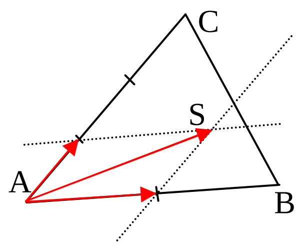
(1) $0 = 4r - 1 + t \Rightarrow t = 1 - 4r$ in (2) $\Rightarrow t = -1$

(2) $2 = 2r - t \Rightarrow 2r = 2 + 1 - 4r \Rightarrow r = 0{,}5$

also $\vec S = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} - 1\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+1\\2-1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$ also S(2/1/3)

d) Aus 2c) ersieht man:

$\vec S = \vec A + \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}4\\2\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}-3\\0\\3\end{pmatrix}$ also $\overrightarrow{AS} = \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{AC}$



S liegt damit ersichtlich im Innern des Dreiecks ABC.

3. a) $\begin{pmatrix}-1\\1\\p_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\Rightarrow$ (1) $-2 = r+s \Rightarrow s=-2-r$ in (2)
(2) $1 = 2r+s$
(3) $p_3 = 2-r$

(2) $1 = 2r-2-r \Rightarrow 3 = r$ (und in (1) $s=-2-3=-5$)

also $p_3 = 2-r = 2-3 = -1$ also $P(-1/1/-1)$

b) Für die Spurgerade von E in der $x_2 x_3$-Ebene gilt: $x_1 = 0$, d.h.

$$\begin{pmatrix}0\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\Rightarrow 0=1+r+s \Rightarrow s=-1-r$$

Für die Spurgerade g gilt damit:

$$g:\ \vec{X}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+(-1-r)\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\-1\\-0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\\-0\end{pmatrix}$$

$$g:\ \vec{X}=\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}+w\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\quad(\text{mit } w\in R)$$

c) Nach Aufgabe a) liegt (-1/1/5) ≠ P(-1/1/-1) nicht in der Ebene **E**.
Die Gerade h liegt also nicht ganz in **E**.
Wenn die beiden Richtungsvektoren der Ebene und der Richtungsvektor der Geraden h linear abhängig sind, dann liegt h parallel zu **E** mit **E** $\cap$ h = { }.
Dies gilt, wenn die zugehörige Determinante den Wert 0 hat.

$$\det\left(\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right)=\begin{vmatrix}1&1&0\\2&1&1\\-1&0&-1\end{vmatrix}=-1-1+0-(0+0-2)=-2+2=0$$

Es gilt also: h verläuft parallel zu **E** mit **E** $\cap$ h = { }.

d) Für jede Gerade g´ mit g´ $\subset$ **E** gilt: g´ $\cap$ h = { } ,denn **E** $\cap$ h = { }
Damit g´ und h windschief zueinander sind, dürfen sie also nur nicht parallel sein.
Wähle z.B.

$$k:\ \vec{X}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+s'\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\quad(\text{mit } s'\in R)$$, dann liegt k ganz in **E** und ist nicht parallel zu h.

k und h sind damit windschief zueinander.