GK m2 * K13 * Zwei letzte Aufgaben zur analytischen Geometrie

1. Gegeben sind im R^3 die Kugel $k(M ; r = 6)$ mit $M(-1/2/3)$ und die Ebene E mit $E: 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 5 = 0$.

   Zeigen Sie, dass die Kugel $k(M ; r = 6)$ die Ebene in einem Kreis schneidet.
   Bestimmen Sie den Mittelpunkt P des Kreises und den zugehörigen Radius ϱ.

2. Im R^3 liegen die beiden Ebenen $E_1: 3x_1 + 4x_3 - 5 = 0$ und $E_2: x_2 - 2x_3 + 1 = 0$.

   a) Bestimmen Sie die Gleichung der Schnittgeraden g von E_1 und E_2.

   Mit $F_k: (3x_1 + 4x_3 - 5) + k \cdot (x_2 - 2x_3 + 1) = 0 \quad (k \in R)$
   wird eine Schar von Ebenen beschrieben, d.h. für jedes $k \in R$ ist F_k eine Ebene.

   b) Wie liegen die Ebenen F_k relativ zu E_1 und E_2?
   Beachten Sie dabei die Punkte der Schnittgeraden g.

   c) Für welchen Wert von k steht F_k senkrecht auf E_1?

   d) Geben Sie eine Schar von Ebenen an, die alle die Gerade h enthalten.

$$h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

GK m2 * K13 * Zwei letzte Aufgaben zur analytischen Geometrie

1. Gegeben sind im R^3 die Kugel $k(M ; r = 6)$ mit $M(-1/2/3)$ und die Ebene E mit $E: 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 5 = 0$.

   Zeigen Sie, dass die Kugel $k(M ; r = 6)$ die Ebene in einem Kreis schneidet.
   Bestimmen Sie den Mittelpunkt P des Kreises und den zugehörigen Radius ϱ.

2. Im R^3 liegen die beiden Ebenen $E_1: 3x_1 + 4x_3 - 5 = 0$ und $E_2: x_2 - 2x_3 + 1 = 0$.

   a) Bestimmen Sie die Gleichung der Schnittgeraden g von E_1 und E_2.

   Mit $F_k: (3x_1 + 4x_3 - 5) + k \cdot (x_2 - 2x_3 + 1) = 0 \quad (k \in R)$
   wird eine Schar von Ebenen beschrieben, d.h. für jedes $k \in R$ ist F_k eine Ebene.

   b) Wie liegen die Ebenen F_k relativ zu E_1 und E_2?
   Beachten Sie dabei die Punkte der Schnittgeraden g.

   c) Für welchen Wert von k steht F_k senkrecht auf E_1?

   d) Geben Sie eine Schar von Ebenen an, die alle die Gerade h enthalten.

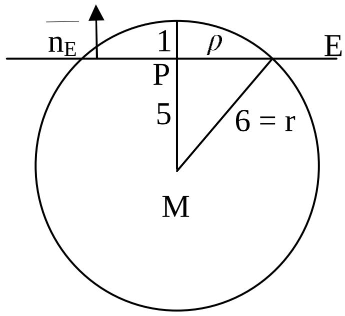
$$h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Lösungen zu „Zwei letzte Aufgaben zur analytischen Geometrie“

1. $E_{HNF}: \frac{1}{3}\cdot(2x_1 - x_2 - 2x_3 - 5) = 0$ und $d(M;E) = \frac{1}{3}\cdot(-2-2-6-5) = -5$

   M hat also von E den Abstand $5 < r$ und die Ebene schneidet damit die Kugel in einem Kreis. Für den Mittelpunkt P dieses Kreises gilt:

$$\vec{P} = \overrightarrow{M} + 5\cdot\vec{n}_E{}^{o} = \begin{pmatrix} -1+\frac{10}{3} \\ 2-\frac{5}{3} \\ 3-\frac{10}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad ; \quad \text{also } P(\tfrac{7}{3}/\tfrac{1}{3}/-\tfrac{1}{3})$$



   Den Radius ϱ erhält man nach Pythagoras:

$$5^2 + \rho^2 = 6^2 \quad \Rightarrow \quad \rho = \sqrt{11}$$

2. a) $E_1 \cap E_2$: (1) $3x_1 + 4x_3 = 5$ und (2) $x_2 - 2x_3 = -1$

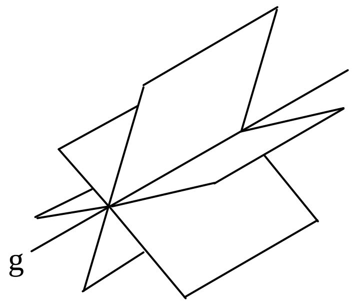
   Finde zwei Punkte in der Schnittmenge $E_1 \cap E_2$; z.B.

   $x_1 = -1 \Rightarrow x_3 = 2$ und daher $x_2 = 3$ also $A(-1/3/2) \in E_1 \cap E_2$

   $x_1 = 7 \Rightarrow x_3 = -4$ und daher $x_2 = -9$ also $B(7/-9/-4) \in E_1 \cap E_2$

   Schnittgerade g: $\vec{X} = \vec{A} + r\cdot\overrightarrow{BA}$ d.h. g: $\vec{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} -8 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix}$

   b)



   Alle Punkte der Geraden g liegen in $E_1 \cap E_2$ und daher auch in jeder Ebene F_k.
   Alle Ebenen, die g enthalten, gehören zur Schar. (Mit einer Ausnahme, nämlich E_2.)

   c) F_k hat den Normalenvektor $\vec{n}_k = \begin{pmatrix} 3 \\ k \\ 4-2k \end{pmatrix}$; aus $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ k \\ 4-2k \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$

   $9 + 0 + 16 - 8k = 0 \Leftrightarrow k = \frac{25}{8}$; für $k = \frac{25}{8}$ gilt also $F_k \perp E_1$.

   d) $\overrightarrow{n_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{n_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ stehen senkrecht auf $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, sind also geeignete Normalenvektoren von zwei Ebenen H_1 und H_2. Setzt man noch A(1/0/2) in die zugehörigen Ebenengleichungen ein, so gilt $g \subset H_1$ und $g \subset H_2$.

   $H_1: 2x_1 + 3x_2 - 2 = 0$ und $H_2: 2x_2 + x_3 - 2 = 0$. Die gesuchte Ebenen-Schar kann also z.B. lauten: $G_k: (2x_1 + 3x_2 - 2) + k\cdot(2x_2 + x_3 - 2) = 0$ (mit $k \in R$)