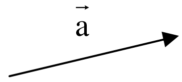
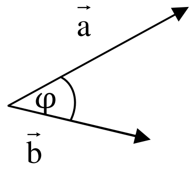
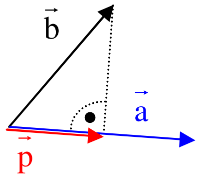
GK m2 * K13 * Anwendungen des Standard-Skalarprodukts im R^3







Länge eines Vektors $\vec{a}$:

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{\vec{a}\circ\vec{a}} = \sqrt{a_1^{\,2}+a_2^{\,2}+a_3^{\,2}}$$

Winkel φ zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$

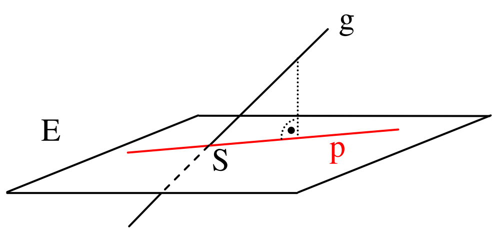
$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{a}\circ\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}$$

Projektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$

$$\vec{p} = \frac{\vec{a}\circ\vec{b}}{\vec{a}^{\,2}}\cdot\vec{a}$$

1. Gegeben ist das Dreieck ABC mit A(1/0/2), B(5/4/-2) und C(0/5/-3).
   a) Der Punkt F ist der Fußpunkt des Lots von C auf AB.
   Bestimmen Sie Koordinaten von F! [Ergebnis: F(4/3/-1)]
   b) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC!
   [Ergebnis: $A = 12\cdot\sqrt{2}$]
   c) Der Punkt S soll die Spitze einer Pyramide mit dem Dreieck ABC als Grundfläche sein. Bestimmen Sie einen Punkt S so, dass diese Pyramide das Volumen 56 hat.
   [Ergebnis: z.B. S(0/6/10) oder S(1/10/6) oder ... S(s_x / s_y /16-s_y) mit s_x, $s_y \in R$]

2. Die Gerade $g:\ \vec{X} = \begin{pmatrix}8\\0\\4\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}5\\2\\3\end{pmatrix}$ schneidet die Ebene $E:\ \vec{X} = \begin{pmatrix}3\\-3\\-1\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\-4\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$
   im Punkt S. Die Gerade p ist die senkrechte Projektion von g auf die Ebene E.
   a) Berechnen Sie die Koordinaten von S.
   [Ergebnis: S(3/-2/1)]
   b) Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden p.
   [Ergebnis: $p:\ \vec{X} = \begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix} + w\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$]



3. Gegeben sind die beiden Geraden $g:\ \vec{X} = \begin{pmatrix}6\\-1\\3\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ und $h:\ \vec{X} = \begin{pmatrix}5\\2\\-1\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix}$.
   a) Zeigen Sie dass g und h windschief zueinander sind.
   b) Bestimmen Sie den Abstand der beiden Geraden voneinander (auf zwei verschiedene Arten). [Ergebnis: $d = \sqrt{21} = \overline{PR}$ mit $P(2/-3/1)$ und $R(3/-1/-3)$]

4. Rechnen Sie Aufg. 1 mit den Punkten A(1/1/2), B(4/-2/11) und C(4/5/6) und V = 165.

5. Rechnen Sie Aufg. 2 mit $g:\ \vec{X} = \begin{pmatrix}5\\3\\3\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ und $E:\ \vec{X} = \begin{pmatrix}-5\\4\\-4\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}5\\-2\\3\end{pmatrix}$

6. Rechnen Sie Aufg. 3 mit $g:\ \vec{X} = \begin{pmatrix}-1\\5\\-3\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}$ und $h:\ \vec{X} = \begin{pmatrix}-3\\1\\3\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$.

Lösungen:

4. a) F(2/0/5) b) $A = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{330}$

c) S(17/-4/-5) oder S(20/-7/4) oder S(20/0/-1) oder ...

5. S(2/1/1) und $p: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + w \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

6. b) $d = \sqrt{30} = \overline{PR}$ mit $P(5/3/-1)$ und $R(3/-2/0)$