GK Mathematik m2 * K13 * Rechnungen im affinen Punktraum

1. Gegeben sind A(1/-2/3), B(0/2/2) und C(5/2/1)
   Zeigen Sie, dass die Punkte A, B und C ein Dreieck bilden.
   Bestimmen Sie die Koordinaten von D so, dass das Viereck ein Parallelogramm ist und ermitteln Sie dann die Koordinaten des Schnittpunktes S der Diagonalen.

2. a) Zeigen Sie, dass die vier Punkte A(1/2/3), B(2/1/0), C(5/7/12) und D(-3/0/1) in einer Ebene E_1 liegen.
   b) Geben Sie mindestens zwei weitere Punkte an, die in dieser Ebene E_1 liegen.
   c) Bestimmen Sie den Punkt $P(0/p_2/-8)$ so, dass er ebenfalls in der Ebene E_1 liegt.
   d) Bestimmen Sie alle Punkte $R(r_1/r_2/4)$ so, dass sie ebenfalls in der Ebene liegen.
   Überlegen Sie, welche Punktemenge durch diese Punkte $R(r_1/r_2/4)$ beschrieben wird.

3. Gegeben sind A(1/-2/3), B(3/0/1), C(-5/1/6) und D(-6/0/7).
   a) Zeigen Sie, dass die Punkte A,B,C und D ein Trapez mit bilden.
   b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S der Diagonalen dieses Trapezes.

4. Der Punkt T teilt die Strecke [AB] im Verhältnis 3 : 1.
   a) Bestimmen Sie die Koordinaten von T , falls gilt A(-2/7/3) und B(4/-5/15).
   b) Bestimmen Sie die Koordinaten von A , falls gilt T(-1/3/2) und B(5/-1,5/1).
   c) Bestimmen Sie die Koordinaten von B , falls gilt A(3/1/0) und T(2/-1/1).

5. Zeigen Sie, dass die Punkte A(1/0/3), B(2/-1/5) und C(3/3/2) ein Dreieck bilden und ermitteln Sie die Koordinaten des „Schwerpunktes“, d.h. des Schnittpunktes der drei Seitenhalbierenden.

6. Von einem Dreieck ABC sind bekannt A(-1/-4/6), C(3/2/1) und der Schwerpunkt S(1/-1/3).
   Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes B.

7. a) Zeigen Sie, dass die Punkte A(1/0/2), B(3/-1/2) und C(1/1/4) eine Ebene festlegen.
   b) Bestimmen Sie alle Punkte $P(0/p_2/p_3)$, die in dieser Ebene liegen!
   Welcher Zusammenhang besteht zwischen p_1 und p_2?
   c) Bestimmen Sie alle Punkte R(a/a/b), die in dieser Ebene liegen!
   Welcher Zusammenhang besteht zwischen a und b?

8. a) Zeigen Sie, dass $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine Basis des R^3 bilden.

   b) Bestimmen Sie die Komponentendarstellung von $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ bezüglich dieser Basis.

   c) Bestimmen Sie die Komponentendarstellung von $\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ bezüglich dieser Basis.

GK Mathematik m2 * K13 * Rechnungen im affinen Punktraum * Lösungen

1. $\overrightarrow{AB} \nparallel \overrightarrow{AC} \Rightarrow$ A, B und C bilden ein Dreieck.

   Aus $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ folgt $\vec{D} = \vec{C} - \vec{B} + \vec{A} \Rightarrow D = D(6/-2/2)$

   $\vec{S} = \vec{A} + \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\cdot(\vec{A}+\vec{C}) \Rightarrow S = S(3/0/2)$

   e) Bestimmen Sie den Punkt $P(0/p_2/-8)$ so, dass er ebenfalls in der Ebene E_1 liegt.

   f) Bestimmen Sie alle Punkte $R(r_1/r_2/4)$ so, dass sie ebenfalls in der Ebene liegen. Überlegen Sie, welche Punktemenge durch diese Punkte $R(r_1/r_2/4)$ beschrieben wird.

2. a) $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -4 \\ -1 & 5 & -2 \\ -3 & 9 & -2 \end{vmatrix} = ... = 0 \Rightarrow$ A, B, C und D liegen in einer Ebene.

   b) z.B. $\vec{P_1} = \vec{A} + 2\cdot\overrightarrow{AB} = 2\cdot\vec{B} - \vec{A} \Rightarrow P_1 = P_1(3/0/-3)$

   $\vec{P_1} = \vec{A} - 1\cdot\overrightarrow{AB} = 2\cdot\vec{A} - \vec{B} \Rightarrow P_2 = P_2(0/3/6)$

   c) Mit $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ kann man jeden Vektor in der Ebene E_1 darstellen.

   D.h. $\overrightarrow{AP} = x\cdot\overrightarrow{AB} + y\cdot\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \vec{P} - \vec{A} = x\cdot(\vec{B} - \vec{A}) + y\cdot(\vec{C} - \vec{A})$ also

   (1) $-1 = x + 4y$ setze $x = -1 - 4y$ in (2) und (3) ein:

   (2) $p_2 - 2 = -x + 5y$ (2) $p_2 = 3 + 9y$

   (3) $-11 = -3x + 9y$ (3) $-14 = 21y$

   also $y = -\frac{2}{3}$ und $p_2 = 3 - 9\cdot\frac{2}{3} = -3$ Damit gilt $P = P(0/-3/-8)$

   d) $\overrightarrow{AR} = \begin{pmatrix} r_1 - 1 \\ r_2 - 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $0 \overset{!}{=} \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AR}) \Leftrightarrow$

   $0 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & (r_1 - 1) \\ -1 & 5 & (r_2 - 2) \\ -3 & 9 & 1 \end{vmatrix} = ... = 45 - 21r_2 + 6r_1 \Leftrightarrow 2r_1 = 7r_2 - 15$

   $\{ (r_1/r_2/4) \ / \text{ mit } 2r_1 = 7r_2 - 15\} = \{(3{,}5r_2 - 7{,}5/\ r_2\ /\ 4)\ /\ r_2 \in R\}$

   Diese Punkte beschreiben eine Gerade, die (im Abstand 4) parallel zur x-y-Ebene liegt.

3. a) $\overrightarrow{AB} = 2\cdot\overrightarrow{CD}$ und $\overrightarrow{AB} \nparallel \overrightarrow{AD} \Rightarrow$ Viereck ABCD ist ein Trapez.

   b) Nach Strahlensatz gilt: $\overline{AS} : \overline{SC} = \overline{AB} : \overline{CD} = 2 : 1 \Rightarrow \overrightarrow{AS} = 2\cdot\overrightarrow{SC} \Rightarrow$

   $3\cdot\vec{S} = 2\cdot\vec{C} + \vec{A} \Rightarrow S = S(-3/0/5)$

4. a) $\overrightarrow{AT} = 3\cdot\overrightarrow{TB} \Rightarrow 4\cdot\vec{T} = 3\cdot\vec{B} + \vec{A} \Rightarrow \vec{T} = \frac{1}{4}\cdot(3\cdot\vec{B} + \vec{A}) \Rightarrow T = T(2{,}5/-2/12)$

   b) $\overrightarrow{AT} = 3\cdot\overrightarrow{TB} \Rightarrow 4\cdot\vec{T} = 3\cdot\vec{B} + \vec{A} \Rightarrow \vec{A} = 4\cdot\vec{T} - 3\cdot\vec{B} \Rightarrow A = A(-19/16{,}5/5)$

   c) $\overrightarrow{AT} = 3\cdot\overrightarrow{TB} \Rightarrow 4\cdot\vec{T} = 3\cdot\vec{B} + \vec{A} \Rightarrow \vec{B} = \frac{1}{3}\cdot(4\cdot\vec{T} - \vec{A}) \Rightarrow B = B(\frac{5}{3}/-\frac{5}{3}/\frac{4}{3})$

5. $\overrightarrow{AB} \nparallel \overrightarrow{AC} \quad \Rightarrow \quad$ A, B und C bilden ein Dreieck. $\quad \vec{S} = \frac{1}{3} \cdot (\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}) \Rightarrow S = S(2/\frac{2}{3}/\frac{10}{3})$

6. $\vec{S} = \frac{1}{3} \cdot (\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}) \Rightarrow \vec{B} = 3 \cdot \vec{S} - \vec{A} - \vec{C} \Rightarrow S = S(1/-1/2)$

7. a) $\overrightarrow{AB} \nparallel \overrightarrow{AC} \quad \Rightarrow \quad$ A, B und C legen eine Ebene fest.

b) $\overrightarrow{AP} = x \cdot \overrightarrow{AB} + y \cdot \overrightarrow{AC} \quad \Rightarrow \quad$ folgendes LGS:

(1) $-1 = 2x \quad \Rightarrow \quad x = -0{,}5$ eingesetzt in (2)

(2) $p_2 = -x + y \qquad$ (2) $y = p_2 - 0{,}5$ eingesetzt in (3)

(3) $p_3 - 2 = 2y \qquad$ (3) $p_3 - 2 = 2p_2 - 1$

Der gesuchte Zusammenhang zwischen p_2 und p_3 lautet also:

$p_3 = 2p_2 + 1$ und die Punktemenge kann man schreiben als $\{ (0/p_2/2p_2+1) / \ p_2 \in R \}$

c) $\overrightarrow{AR} = x \cdot \overrightarrow{AB} + y \cdot \overrightarrow{AC} \quad \Rightarrow \quad$ folgendes LGS:

(1) $a - 1 = 2x$

(2) $a = -x + y \quad \Rightarrow \quad x = y - a$ eingesetzt in (2)

(3) $b - 2 = 2y$

(1) $a - 1 = 2y - 2a$

(3) $b - 2 = 2y$ eingesetzt in (1) $\quad a - 1 = b - 2 - 2a$

Der gesuchte Zusammenhang zwischen a und b lautet also:

$b = 3a + 1$ und die Punktemenge kann man schreiben als $\{ (a/a/3a+1) / \ a \in R \}$

8. a) $\det(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \ldots = -17 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ bilden eine Basis in R^3.

b) $\vec{e}_1 = x \cdot \vec{b}_1 + y \cdot \vec{b}_2 + z \cdot \vec{b}_3$ liefert das folgende LGS:

(1) $1 = x + 2z$

(2) $0 = 2x + 2y - z$

(3) $0 = 3x - y$

Dieses LGS hat die Lösung $(x/y/z) = (\frac{1}{17}/\frac{3}{17}/\frac{8}{17})$

also gilt $\vec{e}_1 = \frac{1}{17} \cdot \vec{b}_1 + \frac{3}{17} \cdot \vec{b}_2 + \frac{8}{17} \cdot \vec{b}_3$.

c) $\vec{a} = x \cdot \vec{b}_1 + y \cdot \vec{b}_2 + z \cdot \vec{b}_3$ liefert das folgende LGS:

(1) $-4 = x + 2z$

(2) $5 = 2x + 2y - z$

(3) $7 = 3x - y$

Dieses LGS hat die Lösung $(x/y/z) = (2/-1/-3)$

also gilt $\vec{a} = 2 \cdot \vec{b}_1 - \vec{b}_2 - 3 \cdot \vec{b}_3$.