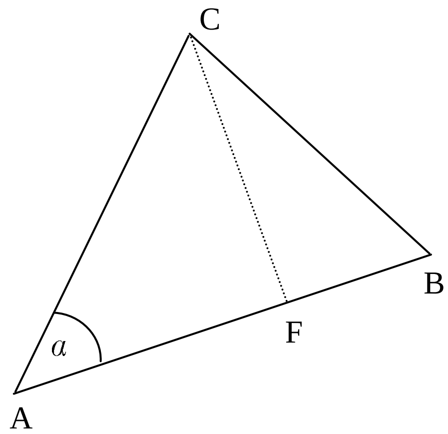
1. Extemporale im GK m2, K13, im letzten Kurshalbjahr am 27.02.2007
Gruppe A

1. Im R^3 ist das Dreieck ABC gegeben durch A(-1/1/3), B(5/-2/3) und C(2/2/1).

   a) Berechnen Sie die Größe des Winkels α und die Länge der Seite $c = \overline{AB}$ im Dreieck ABC.
   b) Berechnen Sie die Koordinaten des Fußpunktes F des Lotes von C auf AB. (Ergebnis: F(1/0/3))
   c) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC auf Tausendstel genau.



2. Im R^3 ist die Ebene E gegeben durch $E: \vec{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   Der Punkt P(4/-4/0) liegt nicht in der Ebene (Nachweis nicht erforderlich!).

   a) Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden g durch P, die senkrecht zu E verläuft.
   b) Bestimmen Sie den Schnittpunkt von g und E. (Ergebnis: S(2/1/-1))
   c) Welchen Abstand hat P von der Ebene?
   d) Spiegelt man den Punkt P an der Ebene E, so erhält man den Spiegelpunkt P^*. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes P^*.

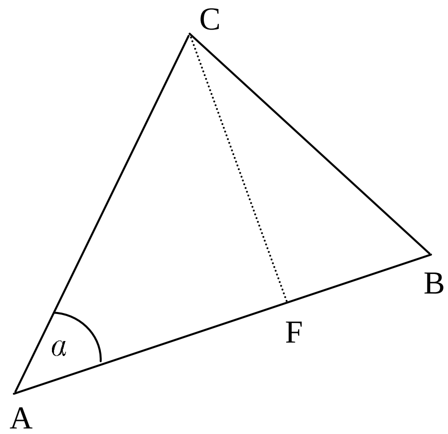
Aufgaben	1a	b	c	2a	b	c	d	Summe
Punkte	5	4	3	4	4	2	3	25

Gutes Gelingen! G.R.

1. Extemporale im GK m2, K13, im letzten Kurshalbjahr am 27.02.2007 Gruppe B

1. Im R^3 ist das Dreieck ABC gegeben durch A(1/-1/3), B(-2/5/3) und C(2/2/1).

   a) Berechnen Sie die Größe des Winkels α und die Länge der Seite $c = \overline{AB}$ im Dreieck ABC.
   b) Berechnen Sie die Koordinaten des Fußpunktes F des Lotes von C auf AB. (Ergebnis: F(0/1/3))
   c) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC auf Tausendstel genau.



2. Im R^3 ist die Ebene E gegeben durch $E: \vec{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

   Der Punkt P(0/-4/4) liegt nicht in der Ebene (Nachweis nicht erforderlich!).

   a) Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden g durch P, die senkrecht zu E verläuft.
   b) Bestimmen Sie den Schnittpunkt von g und E. (Ergebnis: S(-1/1/2))
   c) Welchen Abstand hat P von der Ebene?
   d) Spiegelt man den Punkt P an der Ebene E, so erhält man den Spiegelpunkt P^*. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes P^*.

Aufgaben	1a	b	c	2a	b	c	d	Summe
Punkte	5	4	3	4	4	2	3	25

Gutes Gelingen! G.R.

1. Extemporale im GK m2, K13, im letzten Kurshalbjahr am 27.02.2007
Lösung zur Gruppe A

1. a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5+1 \\ -2-1 \\ 3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2+1 \\ 2-1 \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{36+9+0} = \sqrt{45} = 3\cdot\sqrt{5}$

$$\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{AB}\circ\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{6\cdot 3-3\cdot 1+0\cdot(-2)}{\sqrt{36+9+0}\cdot\sqrt{9+1+4}} = \frac{15}{\sqrt{45\cdot 14}} = \frac{15}{3\cdot\sqrt{70}} = \frac{5}{\sqrt{70}} \Rightarrow$$

$\alpha = 53{,}3007... \approx 53{,}3^{o}$

b) $\overrightarrow{AF} = \frac{\overrightarrow{AB}\circ\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AB}^2}\cdot\overrightarrow{AB} = \frac{15}{45}\cdot\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\vec{F} = \vec{A}+\overrightarrow{AF} = \begin{pmatrix} -1+2 \\ 1-1 \\ 3+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow F(1/0/3)$

c) $A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{FC}\right| = \frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{5}\cdot\sqrt{1^2+2^2+2^2} = \frac{3}{2}\cdot\sqrt{5}\cdot 3 = \frac{9\cdot\sqrt{5}}{2} = 10{,}0623... \approx 10{,}062$

2. a) Für den Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ gilt: (1) $n_1 + n_2 + 3n_3 = 0$ und
(2) $2n_1 + n_2 + n_3 = 0$

(1) in (2): $2\cdot(-n_2-3n_3) + n_2 + n_3 = 0 \Rightarrow -n_2 = 5n_3$; wähle z.B. $n_2 = 5,\ n_3 = -1$

damit gilt: $\vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $g:\ \vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) $g\cap E$: $\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ aus (3) $s = 2 - t - 3r$ folgt

in (1) $r = 1$ und (2) $t = 1$ und (3) $s = -2$; also S(4-2/-4+5/0-1) = S(2/1/-1)

c) $d(P;E) = \left|\overrightarrow{PS}\right| = \sqrt{(2-4)^2 + (1+4)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{4+25+1} = \sqrt{30}$

d) $\overrightarrow{PP^*} = 2\cdot\overrightarrow{PS} = 2\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{P^*} = \vec{P}+2\cdot\overrightarrow{PS} = \begin{pmatrix} 4-4 \\ -4+10 \\ 0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$

also P(0/6/-2)

1. Extemporale im GK m2, K13, im letzten Kurshalbjahr am 27.02.2007
Lösung zur Gruppe B

1\. a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2-1 \\ 5+1 \\ 3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 2+1 \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{9+36+0} = \sqrt{45} = 3\cdot\sqrt{5}$

$$\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{AB}\circ\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{-3\cdot 1+6\cdot 3+0\cdot(-2)}{\sqrt{45}\cdot\sqrt{1+9+4}} = \frac{15}{\sqrt{45\cdot 14}} = \frac{15}{3\cdot\sqrt{70}} = \frac{5}{\sqrt{70}} \Rightarrow$$

$\alpha = 53{,}3007... \approx 53{,}3^{o}$

b) $\overrightarrow{AF} = \frac{\overrightarrow{AB}\circ\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AB}^2}\cdot\overrightarrow{AB} = \frac{15}{45}\cdot\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\vec{F} = \vec{A} + \overrightarrow{AF} = \begin{pmatrix} 1-1 \\ -1+2 \\ 3+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow F(0/1/3)$

c) $A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{FC}\right| = \frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{5}\cdot\sqrt{2^2+1^2+2^2} = \frac{3}{2}\cdot\sqrt{5}\cdot 3 = \frac{9\cdot\sqrt{5}}{2} = 10{,}0623... \approx 10{,}062$

2\. a) Für den Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ gilt: (1) $3n_1 + n_2 + n_3 = 0$ und
(2) $n_1 + n_2 + 2n_3 = 0$

(1) in (2): $n_1 + n_2 + 2(-n_2 - 3n_1) = 0 \Rightarrow -n_2 = 5n_1$; wähle z.B. $n_2 = 5,\ n_1 = -1$

damit gilt: $\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

b) $g \cap E$: $\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ aus (1) s = 2 – t – 3r folgt

in (3) r = 1 und (2) t = 1 und (3) s = – 2 ; also S(0-1/-4+5/4-2) = S(-1/1/2)

c) $d(P;E) = \left|\overrightarrow{PS}\right| = \sqrt{(-1-0)^2 + (1+4)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{1+25+4} = \sqrt{30}$

d) $\overrightarrow{PP^*} = 2\cdot\overrightarrow{PS} = 2\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{P^*} = \vec{P} + 2\cdot\overrightarrow{PS} = \begin{pmatrix} 0-2 \\ -4+10 \\ 4-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$

also P(-2/6/0)