1. Extemporale aus der Mathematik * GK m2 / K13 * 17.10.2006
Gruppe A

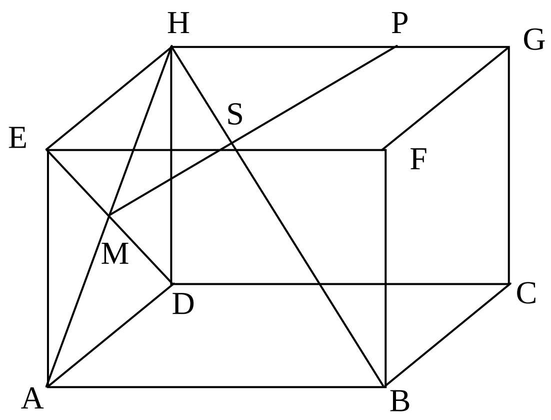
1. Im R^2 soll zum Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ein zweiter Vektor $\vec{b}$ so gefunden werden, dass $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear unabhängig sind.

   a) Geben Sie einen (möglichst einfachen) Vektor $\vec{b}$ an und zeigen Sie dann, dass $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear unabhängig sind.

   b) Stellen Sie nun den Vektor $\vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ dar.

   c) Begründen Sie, ob $\vec{c}$ und $\vec{b}$ linear abhängig sind?

2. Im Quader ABCDEFGH ist M der Mittelpunkt des Vierecks ADHE . P liegt auf der Strecke [HG] und es gilt $\overline{HP} = 2 \cdot \overline{PG}$ (siehe Skizze!).



   Zeigen Sie, dass sich die Geraden MP und HB in einem Punkt S schneiden. In welchem Verhältnis teilt S die Strecke [HB] ?
   (Geben Sie als erstes drei linear unabhängige Vektoren an, mit deren Hilfe Sie die Aufgabe lösen!)

Aufgabe	1a	b	c	2	Σ
Punkte	3	3	2	12	20

Gutes Gelingen! G.R.

1. Extemporale aus der Mathematik * GK m2 / K13 * 17.10.2006
Gruppe B

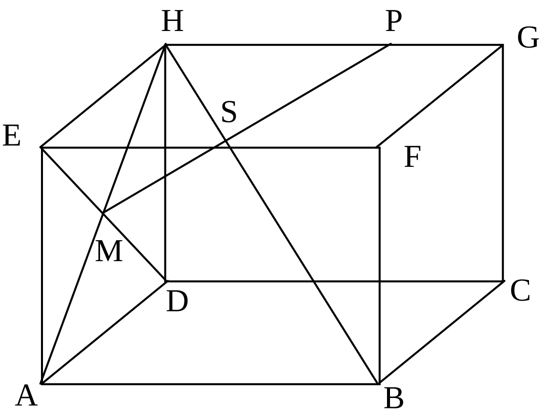
1. Im R^2 soll zum Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein zweiter Vektor $\vec{b}$ so gefunden werden, dass $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear unabhängig sind.

   b) Geben Sie einen (möglichst einfachen) Vektor $\vec{b}$ an und zeigen Sie dann, dass $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear unabhängig sind.

   b) Stellen Sie nun den Vektor $\vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ dar.

   c) Begründen Sie, ob $\vec{c}$ und $\vec{b}$ linear abhängig sind?

2. Im Quader ABCDEFGH ist M der Mittelpunkt des Vierecks ADHE . P liegt auf der Strecke [HG] und es gilt $\overline{HP} = 2 \cdot \overline{PG}$ (siehe Skizze!).



   Zeigen Sie, dass sich die Geraden MP und HB in einem Punkt S schneiden. In welchem Verhältnis teilt S die Strecke [HB] ?
   (Geben Sie als erstes drei linear unabhängige Vektoren an, mit deren Hilfe Sie die Aufgabe lösen!)

Aufgabe	1a	b	c	2	Σ
Punkte	3	3	2	12	20

Gutes Gelingen! G.R.

1. Extemporale aus der Mathematik * GK m2 / K13 * 17.10.2006
Gruppe A * Lösung

1. a) Zu $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ passt z.B. $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, denn aus $r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} = \vec{0}$ folgt damit sofort

$r = 0 = s$, d.h. $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind linear unabhängig.

(Oder ersichtlich gilt damit $\vec{a} \nparallel \vec{b}$)

b) $\vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} \overset{!}{=} x \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$ (1) $-3 = 2x + y$ und (2) $5 = -x$

d.h. $x = -5$ und $y = 7$, also $\vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} \overset{!}{=} -5 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 7 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $\vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sind linear unabhängig, denn sie sind ersichtlich nicht parallel.

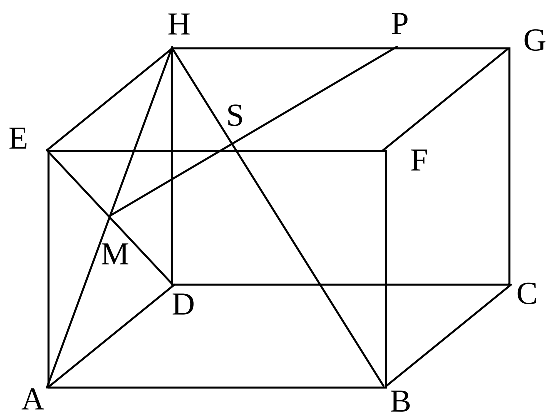
2. Wähle z.B. als drei linear unabhängige Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ und $\vec{c} = \overrightarrow{AE}$.

$\vec{0} = \overrightarrow{MS} + \overrightarrow{SH} + \overrightarrow{HM}$ und

$\overrightarrow{MS} = x \cdot \overrightarrow{MP} = x \cdot (\frac{1}{2} \cdot \vec{b} + \frac{1}{2} \cdot \vec{c} + \frac{2}{3} \cdot \vec{a})$

$\overrightarrow{SH} = y \cdot \overrightarrow{BH} = y \cdot (-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$

$\overrightarrow{HM} = -\frac{1}{2} \cdot \vec{b} - \frac{1}{2} \cdot \vec{c}$



$\vec{0} = \overrightarrow{MS} + \overrightarrow{SH} + \overrightarrow{HM} = x \cdot (\frac{1}{2} \cdot \vec{b} + \frac{1}{2} \cdot \vec{c} + \frac{2}{3} \cdot \vec{a}) + y \cdot (-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) + (-\frac{1}{2} \cdot \vec{b} - \frac{1}{2} \cdot \vec{c})$

$\vec{0} = (\frac{2}{3}x - y) \cdot \vec{a} + (\frac{1}{2} \cdot x + y - \frac{1}{2}) \cdot \vec{b} + (\frac{1}{2} \cdot x + y - \frac{1}{2}) \cdot \vec{c}$

(1) $\frac{2}{3}x - y = 0$

(2) $\frac{1}{2} \cdot x + y - \frac{1}{2} = 0$

(3) $\frac{1}{2} \cdot x + y - \frac{1}{2} = 0$

(1) $\frac{2}{3}x = y$

(2) bzw. (3) $x = 1 - 2y$

(1) in (2) $x = 1 - 2 \cdot \frac{2}{3}x \Leftrightarrow \frac{7}{3}x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{3}{7}$ und $y = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{7} = \frac{2}{7}$

$\overrightarrow{SH} = \frac{2}{7} \cdot \overrightarrow{BH}$ d.h. S teilt [HB] im Verhältnis $\frac{2}{7} : \frac{5}{7} = 2 : 5$.

1. Extemporale aus der Mathematik * GK m2 / K13 * 17.10.2006
Gruppe B * Lösung

1. a) Zu $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ passt z.B. $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, denn aus $r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} = \vec{0}$ folgt damit sofort

$r = 0 = s$, d.h. $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind linear unabhängig.

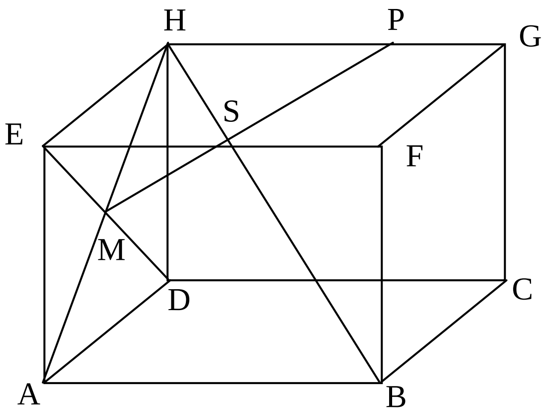
(Oder ersichtlich gilt damit $\vec{a} \nparallel \vec{b}$)

b) $\vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} \overset{!}{=} x \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$ (1) $5 = -2x + y$ und (2) $-3 = x$

d.h. $x = -3$ und $y = -1$, also $\vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} \overset{!}{=} -3 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $\vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sind linear unabhängig, denn sie sind ersichtlich nicht parallel.

2. Lösung wie bei Gruppe A möglich.
Die Geraden MP und HB liegen in der Ebene des Vierecks ABGH.
Man kann die Aufgabe also auch in der Ebene lösen, die durch die beiden Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AH}$ aufgespannt wird.



$\vec{0} = \overrightarrow{MS} + \overrightarrow{SH} + \overrightarrow{HM}$ und

$\overrightarrow{MS} = x \cdot \overrightarrow{MP} = x \cdot (\frac{1}{2} \cdot \vec{b} + \frac{2}{3} \cdot \vec{a})$

$\overrightarrow{SH} = y \cdot \overrightarrow{BH} = y \cdot (-\vec{a} + \vec{b})$

$\overrightarrow{HM} = -\frac{1}{2} \cdot \vec{b}$

$$\vec{0} = \overrightarrow{MS} + \overrightarrow{SH} + \overrightarrow{HM} = x \cdot (\frac{1}{2} \cdot \vec{b} + \frac{2}{3} \cdot \vec{a}) + y \cdot (-\vec{a} + \vec{b}) - \frac{1}{2} \cdot \vec{b}$$

$$\vec{0} = (\frac{2}{3}x - y) \cdot \vec{a} + (\frac{1}{2} \cdot x + y - \frac{1}{2}) \cdot \vec{b}$$

(1) $\frac{2}{3}x - y = 0$ (1) $\frac{2}{3}x = y$

(2) $\frac{1}{2} \cdot x + y - \frac{1}{2} = 0$ (2) $x = 1 - 2y$

(1) in (2) $x = 1 - 2 \cdot \frac{2}{3}x \Leftrightarrow \frac{7}{3}x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{3}{7}$ und $y = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{7} = \frac{2}{7}$

$\overrightarrow{SH} = \frac{2}{7} \cdot \overrightarrow{BH}$ d.h. S teilt [HB] im Verhältnis $\frac{2}{7} : \frac{5}{7} = 2 : 5$.