2. Extemporale aus der Mathematik, GK m2, K13, 18.12.2006, Gruppe A

1. Gegeben sind die Punkte A(1/2/3), B(-1/0/2) und C(2/-2/0).
   a) Zeigen Sie, dass die Punkte A, B und C eine Ebene E festlegen und geben Sie eine Gleichung dieser Ebene E an.
   b) Zeigen Sie, dass der Punkt D(1/-1/1) nicht in dieser Ebene liegt.
   c) Geben Sie die Gleichung einer Geraden g an, die durch D geht und parallel zur Ebene E liegt.
   d) Bestimmen Sie für den Punkt $P(3/-8/p_3)$ den Wert von p_3 so, dass P in der Ebene E liegt.

2. Gegeben ist die Ebene E und die Gerade g.

   E: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ g: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

   Zeigen Sie, dass sich E und g in einem Punkt S schneiden und bestimmen Sie die Koordinaten dieses Schnittpunktes.

Aufgabe	1a	b	c	d	2	Summe
Punkte	4	3	2	3	6	18

Gutes Gelingen! G.R.

2. Extemporale aus der Mathematik, GK m2, K13, 18.12.2006, Gruppe B

1. Gegeben sind die Punkte A(1/2/3), B(-1/0/2) und C(2/1/-2).
   a) Zeigen Sie, dass die Punkte A, B und C eine Ebene E festlegen und geben Sie eine Gleichung dieser Ebene E an.
   b) Zeigen Sie, dass der Punkt D(1/-1/1) nicht in dieser Ebene liegt.
   c) Geben Sie die Gleichung einer Geraden g an, die durch D geht und parallel zur Ebene E liegt.
   d) Bestimmen Sie für den Punkt $P(7/4/p_3)$ den Wert von p_3 so, dass P in der Ebene E liegt.

2. Gegeben ist die Ebene E und die Gerade g.

   E: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ g: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

   Zeigen Sie, dass sich E und g in einem Punkt S schneiden und bestimmen Sie die Koordinaten dieses Schnittpunktes.

Aufgabe	1a	b	c	d	2	Summe
Punkte	4	3	2	3	6	18

Gutes Gelingen! G.R.

2. Extemporale aus der Mathematik, GK m2, K13, 18.12.2006, Gruppe A Lösung

1. a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1-1 \\ 0-2 \\ 2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ -2-2 \\ 0-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$; man sieht $\overrightarrow{AB} \nparallel \overrightarrow{AC}$

$E: \vec{X} = \vec{A} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC}$ also $E: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$

b) $\vec{D} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$
(1) $1 = 1 - 2r + s \Rightarrow 2r = s$
(2) $-1 = 2 - 2r - 4s$
(3) $1 = 3 - r - 3s$

(2) $-3 = -2r - 8r \Rightarrow r = 0,3$

(3) $-2 = -r - 6r \Rightarrow r = \frac{2}{7}$ Widerspruch! Also $D \notin E$

Oder $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = ... \neq 0 \Rightarrow D \notin E$

c) Z.B. $g: \vec{X} = \vec{D} + t \cdot \overrightarrow{AB}$ also $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

d) $\vec{P} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$
(1) $3 = 1 - 2r + s \Rightarrow s = 2 + 2r$
(2) $-8 = 2 - 2r - 4s$
(3) $p_3 = 3 - r - 3s$

(2) $-8 = 2 - 2r - 8 - 8r \Rightarrow 10r = 2 \Rightarrow r = 0,2$ in (3)

(3) $p_3 = 3 - r - 6 - 6r = -3 - 7r = -3 - 1,4 = -4,4$

2. a) $E \cap g: \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

(1) $r + 2s - 3t = 2$ (1) $r + 2s - 3s = 2$
(2) $-r + s - 3t = -5$ (2) $-r + s - 3s = -5$
(3) $-s + t = 0 \Rightarrow t = s$

(1) $r = 2 + s$ in (2) $\Rightarrow r = 2 + s = 3$
(2) $-r - 2s = -5 \Rightarrow r = 5 - 2s \Rightarrow 2 + s = 5 - 2s \Rightarrow s = 1$ $\Rightarrow t = s = 1$

$\vec{S} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$; also $S(6/-4/2)$

2. Extemporale aus der Mathematik, GK m2, K13, 18.12.2006, Gruppe B
Lösung

1. a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1-1 \\ 0-2 \\ 2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 1-2 \\ -2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$; man sieht $\overrightarrow{AB} \nparallel \overrightarrow{AC}$

$E: \vec{X} = \vec{A} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC}$ also $E: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$

b) $\vec{D} \overset{?}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$
$(1)\quad 1 = 1 - 2r + s \quad \Rightarrow s = 2r$
$(2)\quad -1 = 2 - 2r - s$
$(3)\quad 1 = 3 - r - 5s$

$(2)\quad -3 = -2r - 2r \quad \Rightarrow \quad r = 0,75$

$(3)\quad -2 = -r - 10r \quad \Rightarrow \quad r = \frac{2}{11}$

Widerspruch! Also $D \notin E$

Oder $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = ... \neq 0 \quad \Rightarrow \quad D \notin E$

c) Z.B. $g: \vec{X} = \vec{D} + t \cdot \overrightarrow{AB}$ also $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

d) $\vec{P} \overset{?}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$
$(1)\quad 7 = 1 - 2r + s \quad \Rightarrow s = 6 + 2r$
$(2)\quad 4 = 2 - 2r - s$
$(3)\quad p_3 = 3 - r - 5s$

$(2)\quad 4 = 2 - 2r - 6 - 2r \quad \Rightarrow \quad 4r = -8 \quad \Rightarrow \quad r = -2$ in (3)

$(3)\quad p_3 = 3 - r - 30 - 10r = -27 - 11r = -27 + 22 = -5$

2. a) $E \cap g: \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$(1)\quad r + 2s - 3t = -1$
$(2)\quad -r + s - 2t = -3$
$(3)\quad -s + t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = s$

$(1)\quad r + 2s - 3s = -1$
$(2)\quad -r + s - 2s = -3$

$(1)\quad r = s - 1$ in (2) $\quad\quad \Rightarrow \quad r = 2 - 1 = 1$
$(2)\quad -s + 1 - s = -3 \quad \Rightarrow \quad 2s = 4 \quad \Rightarrow \quad s = 2 \quad\quad \Rightarrow \quad t = s = 2$

$\vec{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; also $S(6/-1/1)$