GK m2 * K13

Definition eines Vektorraums über einem Körper K

Ein Vektorraum $\boldsymbol{V}$ über einem Körper K (z.B. Q oder R)
ist eine Menge von Objekten $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \ldots$, für die zwei Operationen,

die Vektoraddition	$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$	(für Elemente $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ aus $\boldsymbol{V}$) und
die Multiplikation	$c \cdot \boldsymbol{x}$	mit einer skalaren Größe c ($\boldsymbol{x}$ aus $\boldsymbol{V}$ und c aus K)

erklärt sind, die folgenden Bedingungen genügen:

1. $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$ (Kommutativität der Vektoraddition)
2. $\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z}$ (Assoziativität der Vektoraddition)
3. Es existiert ein Vektor $\boldsymbol{0}$, so dass
   $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{x}$ für alle $\boldsymbol{x}$ gilt (neutrales Element)
4. Für jeden Vektor $\boldsymbol{x}$ existiert ein eindeutig bestimmter Vektor $-\boldsymbol{x}$, so dass
   $\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ gilt (inverses Element)
5. $1 \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ (Multiplikation mit der skalaren Größe 1)
6. $(c_1 \cdot c_2) \cdot \boldsymbol{x} = c_1 \cdot (c_2 \cdot \boldsymbol{x})$ (Assoziativität der Multiplikation)
7. $c \cdot (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = c \cdot \boldsymbol{x} + c \cdot \boldsymbol{y}$ (Distributivität 1)
8. $(c_1 + c_2) \cdot \boldsymbol{x} = c_1 \cdot \boldsymbol{x} + c_2 \cdot \boldsymbol{x}$ (Distributivität 2)

Zur besseren Unterscheidung von Vektoren und Skalaren schreibt man die Vektoren meist mit einem Vektorpfeil.

Die Vektoren des R^2 und R^3 erfüllen die oben angegebene Definition.
Neben dem R^2 und R^3 gibt es aber noch weitere Beispiele für Vektorräume.

Aufgaben:

1. Begründen Sie, dass die reellen Zahlen R einen Vektorraum über R bilden.

2. Prüfen Sie, ob die folgenden Aussagen zutreffen.
   a) Die reellen Zahlen R bilden einen Vektorraum über den rationalen Zahlen Q.
   b) Die rationalen Zahlen Q bilden einen Vektorraum über den rationalen Zahlen Q.
   c) Die rationalen Zahlen Q bilden einen Vektorraum über den reellen Zahlen R.

3. Begründen Sie:
   a) Die Menge der Polynomfunktionen (mit Koeffizienten aus R) vom Grad kleiner als 4 bilden einen Vektorraum über R.
   b) Die Menge der geraden Polynomfunktionen (mit Koeffizienten aus R) bilden einen Vektorraum über R.
   c) Die Menge der ungeraden Polynomfunktionen (mit Koeffizienten aus R) bilden **keinen** Vektorraum über R.
   d) Die Menge der Polynomfunktionen (mit Koeffizienten aus R) vom Grad 2 bilden **keinen** Vektorraum über R.
   e) Die Menge der Polynomfunktionen (mit Koeffizienten aus Q) bilden **keinen** Vektorraum über R.