**1. Stegreifaufgabe für den GK m2 * K12 * 11.10.2005**

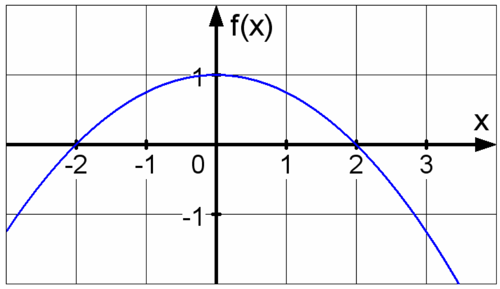
1. Für die Funktion f mit

$f(x) = 1 - \frac{1}{4} \cdot x^2$

soll das bestimmte Integral

$\int_0^2 f(x)\, dx = \int_0^2 1 - \frac{1}{4} \cdot x^2\, dx$

ermittelt werden.




(Graph der Funktion f )

a) Berechnen Sie Untersumme $s_n$ **oder** die Obersumme $S_n$ .

Bestimmen Sie dann $\int_0^2 1 - \frac{1}{4} \cdot x^2\, dx$ durch eine geeignete Grenzwertbildung!

[Ergebnis: $\int_0^2 1 - \frac{1}{4} \cdot x^2\, dx = \frac{4}{3}$ ]

b) Geben Sie nun die Werte für die folgenden bestimmten Integrale an!

$I_1 = \int_{-2}^{2} 1 - \frac{1}{4} \cdot x^2\, dx = ?$

$I_2 = \int_{0}^{-2} 1 - \frac{1}{4} \cdot x^2\, dx = ?$

$I_3 = \int_{0}^{2} \frac{1}{4} \cdot x^2 - 1\, dx = ?$

(Achten Sie auf die Integrationsgrenzen!)

2. Geben Sie jeweils einen Funktionsterm g(x) an, so dass die folgende Gleichung gilt:

a) $\int_{-1}^{1} g(x)\, dx = 0$

b) $\int_{0}^{4} g(x)\, dx = 0$

| Aufgabe | 1a | b | 2a | b | Summe |
|---|---|---|---|---|---|
| Punkte | 10 | 6 | 2 | 2 | 20 |

Gutes Gelingen! G.R.

**1. Stegreifaufgabe für den GK m2 * K12 * 11.10.2005 * Lösungen**

1. a) $\int_0^2 1-\frac{1}{4}\cdot x^2\,dx$ ist zu ermitteln. f ist in [0;2] monoton fallend!

$$f(x) = 1-\frac{1}{4}\cdot x^2 \;;\; a = 0 = x_o \;\; und \;\; b = 2 = x_n \;;\; \Delta x = \frac{2}{n} \;\; und \;\; x_i = \frac{2}{n}\cdot i \quad (i = 0, 1, \ldots, n)$$

$$Untersumme\;\; s_n: \quad s_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1})\cdot\Delta x = \sum_{i=0}^{n-1}[1-\frac{1}{4}\cdot {x_{i+1}}^2]\cdot\Delta x = \sum_{j=1}^{n}[1-\frac{1}{4}\cdot {x_j}^2]\cdot\Delta x =$$

$$\sum_{j=1}^{n}[1-\frac{1}{4}\cdot(\frac{2j}{n})^2]\cdot\frac{2}{n} = \sum_{j=1}^{n}[\frac{2}{n}-\frac{2j^2}{n^3}] = \frac{2}{n}\cdot n-\frac{2}{n^3}\cdot\sum_{j=1}^{n} j^2 = 2-\frac{2}{n^3}\cdot\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6} =$$

$$2-\frac{(n+1)\cdot(2n+1)}{n^2\cdot 3} = 2-\frac{2n^2+3n+1}{3n^2} = 2-\frac{2}{3}-\frac{3}{3n}-\frac{1}{3n^2} = \frac{4}{3}-\frac{1}{n}-\frac{1}{3n^2}$$

$$Obersumme\;\; S_n: \quad S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\cdot\Delta x = \sum_{i=0}^{n-1}[1-\frac{1}{4}\cdot {x_i}^2]\cdot\Delta x = \sum_{i=0}^{n-1}[1-\frac{1}{4}\cdot(\frac{2i}{n})^2]\cdot\frac{2}{n} =$$

$$\sum_{i=0}^{n-1}[\frac{2}{n}-\frac{2i^2}{n^3}] = \frac{2}{n}\cdot n-\frac{2}{n^3}\sum_{i=0}^{n-1} i^2 = 2-\frac{2}{n^3}\sum_{i=1}^{n-1} i^2 = 2-\frac{2}{n^3}\cdot\frac{(n-1)\cdot n\cdot(2n-1)}{6} =$$

$$2-\frac{(n-1)\cdot(2n-1)}{3n^2} = 2-\frac{2n^2-3n+1}{3n^2} = 2-\frac{2}{3}+\frac{1}{n}-\frac{1}{3n^2} = \frac{4}{3}+\frac{1}{n}-\frac{1}{3n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{4}{3} = \int_0^2 1-\frac{1}{4}\cdot x^2\,dx$$

b) $$I_1 = \int_{-2}^{2} 1-\frac{1}{4}\cdot x^2\,dx = 2\cdot\int_0^2 1-\frac{1}{4}\cdot x^2\,dx = 2\cdot\frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

$$I_2 = \int_0^{-2} 1-\frac{1}{4}\cdot x^2\,dx = -\int_0^2 1-\frac{1}{4}\cdot x^2\,dx = -\frac{4}{3}$$

$$I_3 = \int_0^2 \frac{1}{4}\cdot x^2-1\;dx = \int_0^2 -(1-\frac{1}{4}\cdot x^2)\,dx = -\int_0^2 1-\frac{1}{4}\cdot x^2\,dx = -\frac{4}{3}$$

2. a) $\int_{-1}^{1} g(x)\;dx = 0$ gilt z.B. für $g(x) = x$ *oder* $g(x) = 2x$ *oder* $g(x) = x^3$

Der Graph von g muss punktsymmetrisch zum Ursprung sein!

b) $\int_0^4 g(x)\;dx = 0$ gilt z.B. für $g(x) = x-2$ *oder* $g(x) = 2\cdot(x-2)^3$

Der Graph von g muss punktsymmetrisch zum Punkt (2 / 0) sein!