

2. Klausur im LK Mathematik, K12, 24.01.2007

1. a) Die Eulersche Zahl e wurde definiert durch $\int_1^e \frac{1}{x} dx = a$. Geben Sie den Wert von a an und veranschaulichen Sie diese Definition von e durch eine geeignete Skizze!

b) Zeigen Sie, dass $F(x) = 2 \cdot \sqrt{x} \cdot (\ln(x) - 2)$ eine Stammfunktion von $f(x) = \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$ ist.

Berechnen Sie nun $\int_1^e \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} dx$.

c) Der Graph der Funktion $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ soll um die x -Achse rotieren. Das dabei entstehende Rotationsvolumen über dem Intervall $[1; t]$ soll den Volumeneinhalt $\pi \cdot e$ besitzen. Bestimmen Sie den Wert von t auf ein Tausendstel genau!

2. Berechnen Sie $\int_1^5 \frac{x+2}{x \cdot (x+4)} dx$. (Hinweis: $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$)

3. Gegeben ist die Funktionenschar $f_k(x) = x^2 \cdot \ln\left(\frac{k}{x}\right)$ mit $k > 0$, d.h. $D_{f_k} = \mathbb{R}^+$.

a) Bestimmen Sie alle Nullstellen von f_k .

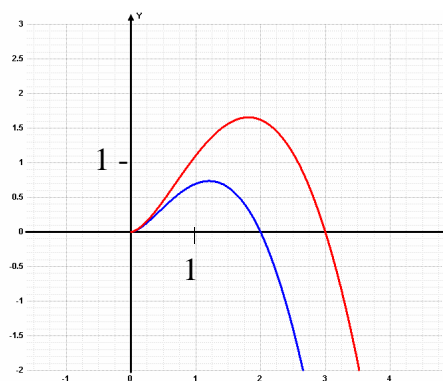
Untersuchen Sie das Verhalten von f_k an den Grenzen des Definitionsbereichs.

b) Zeigen Sie, dass jeder Graph der Schar einen Hochpunkt $H\left(\frac{k}{\sqrt{e}}; \frac{k^2}{2e}\right)$ besitzt.

c) Auf welcher Kurve liegen alle Hochpunkte der Schar?

d) Die Graphik zeigt zwei Kurven der Schar.

Geben Sie die zugehörigen Parameterwerte k an.



e) Zeigen Sie, dass $F_k(x) = \frac{1}{9} x^3 \cdot \left(1 + 3 \cdot \ln\left(\frac{k}{x}\right)\right)$ eine Stammfunktion von $f_k(x)$ ist.

Bestimmen Sie den Inhalt $A(k)$ der Fläche, den der Graph G_{f_k} von f_k mit der x -Achse

einschließt. [Es darf $\lim_{x \rightarrow 0} (x^3 \cdot \ln(\frac{k}{x})) = 0$ verwendet werden.] (Ergebnis: $A(k) = \frac{k^3}{9}$)

f) Für welchen Wert von k schließt der Graph G_{f_k} mit der x -Achse den Flächeninhalt 6 ein?

Aufgabe	1a	b	c	2	3a	b	c	d	e	f	Summe
Punkte	2	5	6	6	5	6	3	2	6	2	43

Gutes Gelingen! G.R.